



FACULDADE DE INFORMÁTICA

PUCRS - Brazil

<http://www.inf.pucrs.br>

REDES DE AUTÔMATOS ESTOCÁSTICOS: UM FORMALISMO PARA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO E CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

L. Brenner, P. Fernandes, C. G. P. Alegretti

TECHNICAL REPORT SERIES

Number 025

April, 2002

Contato:

lbrenner@inf.pucrs.br

www.inf.pucrs.br/~lbrenner

paulof@inf.pucrs.br

www.inf.pucrs.br/~paulof

caio@unicruz.edu.br

Leonardo Brenner é estudante de mestrado do PPGCC na PUCRS/Brasil. Ele é membro do projeto PEPS - Avaliação de Desempenho de Sistemas Paralelos - desde 1998 e desenvolve pesquisa em avaliação de desempenho, redes de filas de espera e redes de autômatos estocásticos.

Paulo Fernandes é professor na PUCRS/Brasil desde 1988. Ele é coordenador do projeto PEPS desde 1998. Ele desenvolve pesquisa nas áreas de avaliação de desempenho, métodos numéricos e modelos markovianos.

Caio Graco Prates Alegretti é mestre em Ciência da Computação pela PUCRS/Brasil e professor na Unicruz/Brasil. Sua área de pesquisa é em avaliação de desempenho, redes de filas de espera e redes de autômatos estocásticos. Ele é membro do projeto PEPS desde 1998.

Copyright © Faculdade de Informática - PUCRS

Publicado por PPGCC - FACIN - PUCRS

Av. Ipiranga, 6681

90619-900 Porto Alegre - RS - Brasil

Redes de Autômatos Estocásticos: Um formalismo para avaliação de desempenho e confiabilidade de sistemas

Paulo Fernandes¹
paulof@inf.pucrs.br

Leonardo Brenner¹
lbrenner@inf.pucrs.br

Caio G. P. Alegretti²
caio@unicruz.edu.br

¹PPGCC-PUCRS – Av. Ipiranga, 6681 – 90619-900 Porto Alegre

²Depto de Informática-UNICRUZ – R. Andrade Neves, 308 – 98025-810 Cruz Alta

Abstract. *This paper presents the Stochastic Automata Networks (SAN) formalism, a theoretical tool to describe temporal relations among entities using stochastic processes. The SAN formalism is introduced by an informal definition of its modeling primitives. Next, the formal description proves how a SAN allows a non-ambiguous definition of the formalism properties. Finally, two model examples are presented. The paper conclusion points out some benefits and application scope of the SAN in the performance and reliability evaluation of complex systems.*

Resumo. *Este artigo apresenta o formalismo de Redes de Autômatos Estocásticos (SAN), uma ferramenta teórica que permite descrever relações temporais de entidades através de processos estocásticos. O formalismo SAN é inicialmente apresentado através de uma definição informal de suas primitivas de modelagem. Em seguida, uma descrição formal permite definir inequivocamente as propriedades do formalismo SAN. Finalmente, breves exemplos do formalismo são apresentados. A conclusão permite vislumbrar os benefícios e a aplicabilidade das SAN na avaliação de desempenho e confiabilidade de sistemas complexos.*

1 Introdução

A avaliação de desempenho e confiabilidade de sistemas através de métodos analíticos têm sido alvo de numerosos estudos nas áreas de ciência da computação e matemática aplicada. As Cadeias de Markov [17] são naturalmente empregadas como formalismo para descrever e buscar soluções estacionárias para os mais diversos tipos de realidades. O poder de descrição praticamente ilimitado¹ e a grande simplicidade de compreensão permitem a utilização frequente deste formalismo, que não se resume apenas à área de avaliação de desempenho e confiabilidade. No entanto, a simplicidade das cadeias de Markov também é a raiz do principal obstáculo na sua utilização. O conhecido problema de explosão de espaço de estados torna modelos markovianos inviáveis para a manipulação de sistemas complexos [17]. O drástico aumento no número de estados quando adicionamos componentes em uma cadeia de Markov dificulta a construção de modelos. Adicionalmente o armazenamento de um modelo fica prejudicado, pois uma matriz quadrada da ordem do número de estados deve ser utilizada. Devido a solução do modelo ser feita pela

¹Embora as cadeias de Markov estejam limitadas à descrição de processos estocásticos através de variáveis aleatórias com distribuição exponencial, praticamente qualquer outro tipo de distribuição pode ser representado por uma cadeia de Markov se admitirmos a utilização de um número maior de estados [2].

solução do sistema linear representado por esta matriz, a explosão do espaço de estados também prejudica a obtenção de resultados numéricos [16].

Na esperança de evitar este desconfortável problema das Cadeias de Markov solucionadas enquanto sistemas de equações lineares, as soluções à forma-produto de certos casos particulares são empregadas. Processos de nascimento e morte e redes de fila de espera [9] são os exemplos mais freqüentes. De fato as décadas de 60 e 70 permitiram a descoberta de algoritmos bastante eficientes para a solução de modelos bastante grandes [3, 11, 15]. Ainda que permitam a definição extremamente simples de modelos com espaço de estado enorme, esta abordagem tem uma natural limitação de escopo. Soluções à forma-produto [9, 11] para casos particulares têm sido largamente empregadas tanto pela comunidade científica como por projetistas de sistemas em geral. As redes de filas de espera (QN - *Queueing Networks*) são o principal exemplo desta abordagem, principalmente devido aos eficientes algoritmos desenvolvidos na década de 70 [3, 15]. A limitação intrínseca desta abordagem é a impossibilidade de descrever realidades mais complexas. Modelos com alocação simultânea de recursos, por exemplo, não podem ser descritos por QN com solução à forma-produto.

Tentando manter a liberdade de escopo das Cadeias de Markov, abordagens como as Redes de Petri Estocásticas [1] propõem um formalismo compacto e eficiente para descrever problemas complexos com sincronismo e paralelismo. Infelizmente, abordagens como esta se limitam a resolver as dificuldades de modelagem, sem adicionar um real ganho ao problema da busca da solução estacionária que permanece o mesmo das Cadeias de Markov tradicionais. Recentemente, a comunidade de pesquisa das Redes de Petri Estocásticas tem buscado remediar este problema com o uso de álgebra tensorial [5], porém os resultados obtidos ainda são insipientes.

Neste sentido o formalismo das Redes de Autômatos Estocásticos (SAN - *Stochastic Automata Networks*), foco central deste relatório, busca proporcionar uma forma compacta de descrever realidades complexas, otimizando ainda a busca de soluções estacionárias. O princípio de modelagem das SAN é descrever um sistema complexo como um conjunto de subsistemas que interagem ocasionalmente. Neste sentido, esta abordagem além de modular permite descrever primitivas de paralelismo (quando autômatos não interagem) e sincronismo (quando autômatos interagem). As SAN possuem uma equivalência de escopo de aplicação com as Cadeias de Markov, mas ao contrário destas, o formalismo SAN permite uma estruturação do modelo baseada na álgebra tensorial generalizada [7] que facilita a sua solução estacionária.

O formalismo SAN foi inicialmente proposto por Plateau em 1984 [12]. No início da década de 90 as primeiras soluções foram formalizadas para modelos em escala de tempo discreta e contínua [13]. Na virada do século, o formalismo SAN foi novamente revisto face aos eficientes algoritmos para modelos a escala de tempo contínua [7]. Nesta ocasião, uma ferramenta de software (*PEPS 2000 - Performance Evaluation of Parallel Systems*) para a modelagem e solução de SAN foi disponibilizada à comunidade científica [18].

O propósito deste relatório é apresentar a nova formulação teórica das SAN e desta forma, divulgar esta ferramenta teórica para a comunidade acadêmica brasileira de avaliação de desempenho. Esta nova formulação das SAN é em parte motivada pelas recentes evoluções do formalismo.

As duas próximas seções descrevem o formalismo SAN primeiro informalmente e depois formalmente. A seção 4 apresenta breves exemplos de aplicações e finalmente a conclusão tece

considerações sobre as facilidades de solução já disponíveis e os trabalhos futuros neste tema.

2 Definição Informal

As Redes de Autômatos Estocásticos (SAN - Stochastic Automata Networks) são um formalismo para modelagem de sistemas com grandes espaço de estados. A idéia central das SAN é modelar um sistema em vários subsistemas quase independentes, diz-se quase independente pois pode haver interação entre cada subsistema, como pode ser visto na Figura 1, onde o sistema foi dividido em três subsistemas (autômatos) que interagem entre si. Essa modularização definida nas SAN permite o armazenamento e a solução de sistemas complexos por evitar os prejuízos da explosão do espaço de estados, existente por exemplo em Cadeias de Markov, com o qual SAN tem equivalência de descrição.

Uma modelagem em SAN é feita com o uso de autômatos, modelados neste relatório como círculos, e transições, modeladas através de arcos. Os autômatos fazem a parte de modelagem dos estados do sistema, ou seja, cada círculo representa um estado discreto onde pode se encontrar o sistema, e as transições, implementam a parte que diz respeito a mudança (transição) entre os estados do autômato.

No decorrer dessa seção são descritas as primitivas de modelagem utilizadas pelo formalismo SAN.

2.1 Autômatos

Um autômato é um modelo matemático de um sistema, com entradas e saídas discretas. O sistema pode estar em qualquer um dentre um número finito de estados ou configurações internas. O estado de um sistema sumariza a informação referente as entradas passadas que é necessária para determinar o comportamento do sistema para entradas subseqüentes.

A Figura 1 modela um sistema através de três autômatos, onde o autômato $\mathcal{A}^{(1)}$, possui três estados ($b^{(1)}$, $c^{(1)}$ e $d^{(1)}$), o segundo autômato ($\mathcal{A}^{(2)}$), possui dois estados ($x^{(2)}$ e $z^{(2)}$) e o terceiro autômato ($\mathcal{A}^{(3)}$) possui também três estados ($v^{(3)}$, $w^{(3)}$ e $y^{(3)}$).

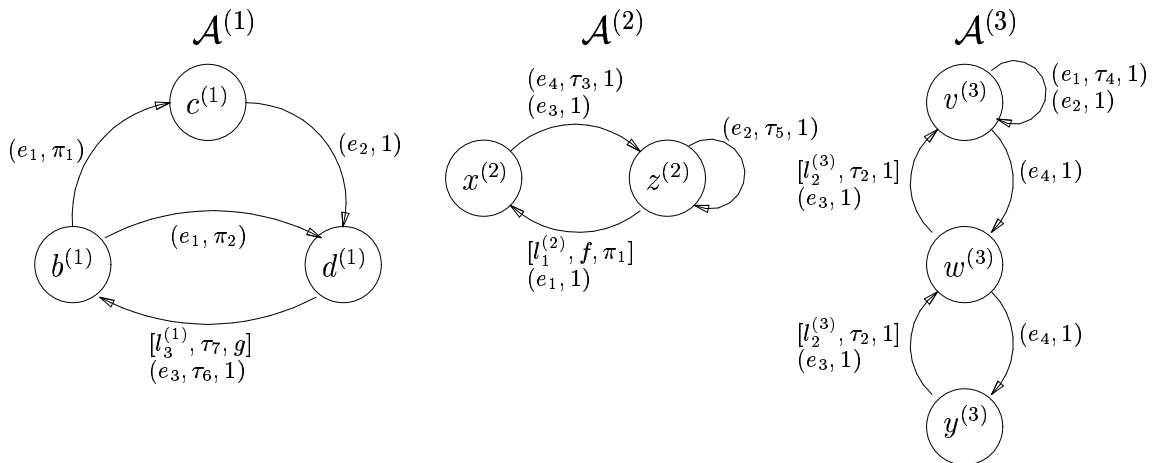


Figura 1: Modelo SAN com três autômatos

O estado global de uma rede de autômatos estocásticos é definido como a combinação de todos os estados locais de cada autômato. A Figura 2 apresenta um autômato único (uma cadeia

de Markov) equivalente à SAN modelada na Figura 1. Neste autômato, dito global, cada estado é a combinação de uma tripla de estados locais de cada autômato. Por exemplo, quando a SAN representada na Figura 1 encontra-se no estado $b^{(1)}$ do autômato $\mathcal{A}^{(1)}$, no estado $x^{(2)}$ do autômato $\mathcal{A}^{(2)}$ e no estado $y^{(3)}$ do autômato $\mathcal{A}^{(3)}$, esta situação equivale ao estado global bxy do autômato modelado na Figura 2.

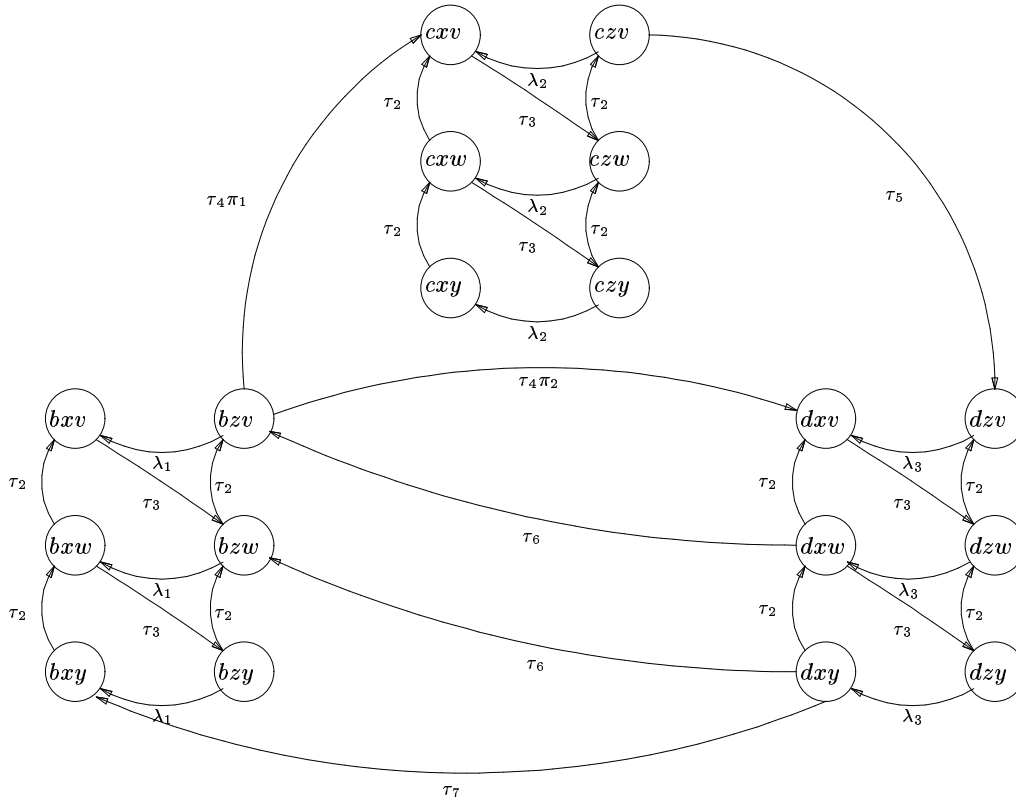


Figura 2: Autômato global equivalente ao modelo SAN com três autômatos

De acordo com essa definição, um autômato pode ser descrito como um conjunto de estados e um conjunto de transições entre esses estados.

As transições em cada autômato podem ser divididas em transições locais e transições sincronizadas.

2.2 Transições locais

As transições locais são utilizadas em SAN para alterar o estado local de um autômato sem que essa alteração ocasione uma mudança em outro autômato. Isso é particularmente interessante, pois permite que vários autômatos tenham um comportamento paralelo. Descreve-se uma transição local ao autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ através de uma tripla $[l_j^{(i)}, \tau_j, \pi_j]$ composta pelo identificador da transição local ($l_j^{(i)}$), a taxa de ocorrência (τ_j) e a probabilidade de rotação (π_j). Na Figura 1 é mostrada uma transição local no autômato $\mathcal{A}^{(3)}$, transição essa definida pela tripla $[l_2^{(3)}, \tau_2, 1]$.

2.3 Transições sincronizadas

Um pouco mais sofisticadas, as transições sincronizadas podem trocar o estado local de dois ou mais autômatos simultaneamente. Através das transições sincronizadas é possível então

fazer a interação entre autômatos sob a forma de sincronismo no disparo de transições. Descreve-se transições sincronizadas em SAN com o uso de uma tripla (e, τ_e, π_e) no autômato mestre do evento sincronizante e quantas duplas (e, π_e) em cada um dos autômatos escravos deste evento sincronizante. Note-se que a definição de autômato mestre e escravo é feita individualmente para cada um dos eventos sincronizantes. Desta forma, um único autômato é escolhido mestre para cada um dos eventos sincronizantes e em relação a este evento todas as transições referentes a ele neste autômato serão do tipo mestre, *i.e.*, utilizando a tripla (e, τ_e, π_e) , sendo as transições nos demais autômatos do tipo escravo, *i.e.*, (e, π_e) . Note-se ainda que um autômato pode ser mestre em relação a um evento sincronizante e escravo em relação a outro.

Cada tripla de transição (e, τ_e, π_e) de autômato mestre é definida por:

- um identificador(e) da transição;
- uma taxa(τ_e) de ocorrência;
- uma probabilidade(π_e) de rotação.

As duplas de transição (e, π_e) de autômatos escravos são descritas da seguinte forma:

- um identificador(e) da transição;
- uma probabilidade(π_e) de rotação.

Pode-se ver na Figura 1, uma tripla de transição sincronizada $(e_4, \tau_3, 1)$ de autômato mestre, no autômato $\mathcal{A}^{(2)}$, essa transição faz com que haja um alteração de estado também no autômato $\mathcal{A}^{(3)}$ onde há duplas de transições sincronizadas.

Usa-se para representar as transições locais uma tripla entre conchetes, já para transições sincronizadas usa-se parentes, tanto para a tripla do autômato mestre quanto para a dupla do autômato escravo.

É interessante ressaltar que tanto na tripla do autômato mestre como nas duplas dos autômatos escravos a soma das probabilidades(π_e) de rotação deve ser igual um (1), para todas as transições referentes a um mesmo evento e partindo de um mesmo estado local.

2.4 Taxas e probabilidades funcionais

Além dos eventos sincronizantes, taxas e probabilidades funcionais são utilizadas para representar possíveis interações entre autômatos. Ambos os tipos de transições vistas (locais e sincronizadas) podem conter taxas funcionais tanto nas triplas de transições locais, como nas triplas de autômatos mestre. Deve-se ressaltar que essas taxas podem ser definidas por funções que são avaliadas conforme os estados atuais do modelo SAN.

No autômato $\mathcal{A}^{(2)}$ da Figura 1, usa-se uma função para definirmos a taxa de transição do evento local $l_1^{(2)}$. Definindo-se a função f como segue abaixo, temos então três taxas de transição distintas dependendo do estado que se encontra o modelo.

$$f = \begin{cases} \lambda_1 & \text{se o autômato } \mathcal{A}^{(1)} \text{ está no estado } b^{(1)}; \\ \lambda_2 & \text{se o autômato } \mathcal{A}^{(1)} \text{ está no estado } c^{(1)}; \\ \lambda_3 & \text{se o autômato } \mathcal{A}^{(1)} \text{ está no estado } d^{(1)}; \end{cases}$$

Utiliza-se funções também para definirmos probabilidades de rotação que só acontecerão na conjunção de determinados estados dos autômatos. Essa utilização pode ser vista no evento

local $l_3^{(1)}$, quando definimos uma função g da seguinte maneira:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{se o autômato } \mathcal{A}^{(2)} \text{ está no estado } x^{(2)} \text{ e o autômato } \mathcal{A}^{(3)} \text{ está no estado } y^{(3)}; \\ 0 & \text{nos casos contrários;} \end{cases}$$

3 Definição Formal

Será considerado nesse artigo a formalização de uma SAN compreendendo N autômatos $\mathcal{A}^{(i)}$ ($i \in [1..N]$), L eventos locais e E eventos sincronizantes².

Sejam

- λ conjunto de identificadores dos eventos locais;
- ε conjunto de identificadores dos eventos sincronizantes;
- $\mathcal{A}^{(i)}$ i -ésimo autômato de uma SAN;
- $S^{(i)}$ conjunto de estados locais de um autômato $\mathcal{A}^{(i)}$;
- n_i número de estados de $S^{(i)}$ ($n_i = \text{cardinalidade}(S^{(i)})$);
- $x^{(i)}$ um estado local do autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ ($x^{(i)} \in S^{(i)}$);
- \tilde{x} estado global (combinação dos estados locais) de um SAN de N autômatos, $\tilde{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ onde $x^{(i)}$ é o estado local de um autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ ($\tilde{x} \in \prod_{i=1}^N S^{(i)}$);
- $\tilde{x}(x^{(i)} \rightarrow y^{(i)})$ estado global obtido pela substituição do estado local $x^{(i)}$ pelo estado local $y^{(i)}$ no autômato $\mathcal{A}^{(i)}$;
- $x^{(\omega)}$ composição dos estados locais $x^{(i)}$ onde $i \in \omega$, com $\omega \subset [1..N]$;

Note que a definição de um estado local do autômato ($x^{(i)}$) e a definição de um estado global (\tilde{x}) podem ser vistas como casos particulares de $x^{(\omega)}$. Um estado local é o caso onde $\omega = \{i\}$, ao passo que o estado global é o caso onde $\omega = [1..N]$.

Definição 1 Elemento funcional $f(\mathcal{A}^{(\omega)})$ é uma função de $\prod_{i \in \omega} S^{(i)}$ em \mathbb{R}^+ , onde ω é um subconjunto de $[1..N]$.

Os autômatos $\mathcal{A}^{(i)}$ com $i \in \omega$ são os parâmetros do elemento $f(\mathcal{A}^{(\omega)})$. Os elementos funcionais servem para definir as probabilidades e as taxas funcionais conforme descritos a seguir.

Seja

- $f(x^{(\omega)})$ elemento funcional $f(\mathcal{A}^{(\omega)})$ avaliado para estados locais $x^{(\omega)}$;

Note que todos os elementos constantes podem ser vistos como elementos funcionais que têm sempre o mesmo valor independentemente do conjunto de parâmetros $x^{(\omega)}$. Da mesma forma, os elementos funcionais com um conjunto de parâmetros restritos a um subconjunto ω de $[1..N]$ podem ser vistos como funções de um estado global \tilde{x} com avaliação idêntica para todos $\tilde{x}(x^{(i)} \rightarrow y^{(i)})$ com $i \notin \omega$. Desta maneira, todos os elementos de uma SAN podem ser considerados como funções de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em \mathbb{R}^+ .

²No decorrer deste artigo é adotada a notação $[i..j]$ referindo-se a um número no intervalo de i até j , inclusive, pertencendo ao conjunto dos números naturais e a notação $[i, j]$ referindo-se a um número pertencente ao intervalo i e j inclusive, no conjunto de números reais.

Definição 2 Cada evento local de uma SAN é identificado pela notação $l^{(i)}$ que descreve seu identificador e o autômato onde o identificador aparece ($\mathcal{A}^{(i)}$).

Definição 3 Uma tripla de evento local $[l^{(i)}, \tau_{l^{(i)}}, \pi_{l^{(i)}}]$ é composta de três informações:

- 3.1. $l^{(i)} \in \lambda$, identificador do evento local;
- 3.2. $\tau_{l^{(i)}}$, elemento funcional definido de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em \mathbb{R}^+ , representa uma taxa de ocorrência do evento local l ;
- 3.3. $\pi_{l^{(i)}}$, elemento funcional definido de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em $[0, 1]$, representa a probabilidade de rotação de uma transição local quando da ocorrência do evento local $l^{(i)}$.

Definição 4 Cada evento sincronizante de uma SAN é identificado por:

- 4.1. identificador e , com $e \in \varepsilon$;
- 4.2. índice do seu autômato mestre $l^{(e)}$, com $l^{(e)} \in [1..N]$.

Definição 5 Uma tripla de sincronização de autômato mestre (e, τ_e, π_e) é composta de três informações:

- 5.1. $e \in \varepsilon$, identificador de um evento sincronizante;
- 5.2. τ_e , elemento funcional definido de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em \mathbb{R}^+ , representa uma taxa de ocorrência do evento sincronizante e ;
- 5.3. π_e , elemento funcional definido de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em $[0, 1]$, representa a probabilidade de rotação de uma transição sincronizada quando da ocorrência do evento sincronizante e .

Definição 6 Uma dupla de sincronização de autômato escravo (e, π_e) é composta de duas informações:

- 6.1. $e \in \varepsilon$, identificador de um evento sincronizante;
- 6.2. π_e , elemento funcional definido de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em $[0, 1]$, representa a probabilidade de rotação de uma transição sincronizada quando da ocorrência do evento sincronizante e .

Definição 7 O conjunto LB contém todos os rótulos de transição. Cada rótulo de transição deste conjunto é composto de:

- 7.1. lista de triplas de eventos locais $[l^{(i)}, \tau_{l^{(i)}}, \pi_{l^{(i)}}]$, a qual pode ser vazia;
- 7.2. uma lista de triplas de sincronização de autômato mestre (e, τ_e, π_e) e uma lista de duplas de sincronização de autômato escravo (e, π_e) , que contenha no máximo uma vez cada evento $e \in \varepsilon$.

A interpretação desses rótulos sobre a transição de um autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ são as seguintes:

- lista de triplas de eventos locais é uma lista com o número de triplas igual ao número de eventos locais que podem causar essa transição. Esse número pode ser zero — lista vazia — se a transição não puder ser disparada independentemente dos outros autômatos;

- lista de triplas de sincronização é uma lista com um número de triplas igual ao número de eventos sincronizantes que podem causar essa transição. Esse número pode ser zero — lista vazia — se a transição em questão não puder ser disparada de maneira sincronizada com os outros autômatos.

Definição 8 Cada autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ é definido por:

- 8.1. $S^{(i)}$ é o conjunto de estado do autômato $\mathcal{A}^{(i)}$;
- 8.2. $Q^{(i)}$ é a função de transição do autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ definido de $S^{(i)} \times S^{(i)}$ em LB ;

Um autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ tem como parâmetros a união dos parâmetros de todos os elementos funcionais contidos nos seus rótulos de transição.

Sejam

- $\mathcal{A}^{(i)}(\mathcal{A}^{(\omega)})$ autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ que possui como parâmetros os autômatos $\mathcal{A}^{(j)}$ onde $j \in \omega$;
- $\mathcal{A}^{(i)}(x^{(\omega)})$ autômato $\mathcal{A}^{(i)}(\mathcal{A}^{(\omega)})$ com todos seus elementos funcionais avaliados para composição dos estados locais $x^{(\omega)}$;
- $\eta^{(e)}$ conjunto dos índices i ($i \in [1..N]$), tal que o autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ possui ao menos um dos rótulos de $Q^{(i)}$ numa tripla de sincronização com o identificador do evento e ;
- $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$ rótulo da transição do estado local $x^{(i)}$ para o estado local $y^{(i)}$;
- $\tau_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}]$ taxa local do rótulo $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$;
- $\pi_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}]$ probabilidade de rotação da tripla do evento local $[l^{(i)}, \tau_{l^{(i)}}, \pi_{l^{(i)}}]$ associada à transição $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$;
- $succ_{l^{(i)}}(x^{(i)})$ o conjunto dos estados $y^{(i)}$ tais que o rótulo $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$ possui uma tripla de evento local com o identificador $l^{(i)}$ e $\tau_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}] \neq 0$, $\pi_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}] \neq 0$ (elementos funcionais não identicamente nulos);
- $\tilde{x}(x^{(i)}) \rightarrow y^{(i)}$ o estado global obtido em substituição do estado local $x^{(i)}$ pelo estado local $y^{(i)}$ no autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ ($y^{(i)} \in succ_{l^{(i)}}(x^{(i)})$);
- $\tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}]$ a taxa sincronizante da tripla de sincronização (e, τ_e, π_e) associada à transição $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$;
- $\pi_e[x^{(i)}, y^{(i)}]$ a probabilidade de rotação da tripla de sincronização (e, τ_e, π_e) associada à transição $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$;
- $succ_e(x^{(i)})$ o conjunto dos estados $y^{(i)}$ tais que o rótulo $Q^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$ possui uma tripla de sincronização com o identificador e e $\tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] \neq 0$, $\pi_e[x^{(i)}, y^{(i)}] \neq 0$ (elementos funcionais não identicamente nulos);
- $\tilde{x}(x^{(i)}) \xrightarrow{i \in \eta^{(e)}} y^{(i)}$ o estado global obtido em substituição de todos os estados locais $x^{(i)}$ por $y^{(i)}$ em todos os autômatos $\mathcal{A}^{(i)}$ ($i \in \eta^{(e)}$ e $y^{(i)} \in succ_e(x^{(i)})$);

Dizemos que um evento sincronizante e é *realizável* no estado global \tilde{x} se e somente se $\forall i \in \eta^{(e)}$ os conjuntos $succ_e(x^{(i)})$ não são vazios.

Definição 9 Uma SAN composta de N autômatos, L eventos locais e E eventos sincronizantes é definida por:

- 9.1. cada um dos autômatos $\mathcal{A}^{(i)}$ ($i \in [1..N]$);
- 9.2. cada um dos eventos locais $l^{(i)}$ ($l^{(i)} \in \lambda$);

9.3. cada um dos eventos sincronizantes e ($e \in \varepsilon$);

9.4. a função de atingibilidade F , um elemento funcional definido de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ em $[0..1]$.

A função F associa aos estados globais de $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$ o valor 1 se eles são atingíveis e 0 em caso contrário.

Sejam

S espaço de estados da SAN definido como $\prod_{i=1}^N S^{(i)}$;

R subconjunto de S que compreende todos os estados \tilde{x} tais que $F(\tilde{x}) = 1$;

Uma SAN define um único autômato global equivalente. Esta abordagem foi desenvolvida em [6] e não será desenvolvida neste artigo.

3.1 SAN bem definida

A definição de uma SAN deve ser não ambígua, o que quer dizer que um único gerador infinitesimal markoviano pode ser obtido a partir de uma SAN. Para isso algumas restrições devem ser feitas. As SAN que obedecem a estas restrições são denominadas SAN *bem definidas*.

Restrição 1 Um autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ é bem definido se e somente se para todo $\tilde{x} \in S$, para todo $x^{(i)} \in S^{(i)}$ e para todo $l^{(i)} \in \lambda$ tal que $\text{succ}_{l^{(i)}}(x^{(i)})$ não é vazio:

1.1. $\forall y^{(i)}, z^{(i)} \in \text{succ}_{l^{(i)}}(x^{(i)})$

$$\tau_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}](\tilde{x}) = \tau_{l^{(i)}}[x^{(i)}, z^{(i)}](\tilde{x});$$

1.2. $\left(\sum_{y^{(i)} \in \text{succ}_{l^{(i)}}(x^{(i)})} \pi_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}](\tilde{x}) \right) = 1$ ou um elemento funcional que vale 0 ou 1;

Restrição 2 Um autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ é bem definido se e somente se para todo $\tilde{x} \in S$, para todo $x^{(i)} \in S^{(i)}$ e para todo $e \in \varepsilon$ tal que $\text{succ}_e(x^{(i)})$ não é vazio:

2.1. $\forall y^{(i)}, z^{(i)} \in \text{succ}_e(x^{(i)})$

$$\tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}](\tilde{x}) = \tau_e[x^{(i)}, z^{(i)}](\tilde{x});$$

2.2. $\left(\sum_{y^{(i)} \in \text{succ}_e(x^{(i)})} \pi_e[x^{(i)}, y^{(i)}](\tilde{x}) \right) = 1$ ou um elemento funcional que vale 0 ou 1;

As triplas de sincronização referentes a um mesmo evento sincronizante e e referentes à transições de $\mathcal{A}^{(i)}$ saindo de um mesmo estado devem possuir a mesma taxa de transição (restrição 2.1) e a soma das probabilidades de rotação de todas as transições saindo desse mesmo estado deve ser igual a um (1.0) ou a um elemento funcional avaliado sobre $[0..1]$ (restrição 2.2). Estas restrições têm por objetivo garantir a unicidade da definição das taxas de eventos sincronizantes em relação ao conjunto de transições sincronizadas em cada um dos autômatos.

Restrição 3 Um evento sincronizante $e \in \varepsilon$ é bem definido se e somente se: uma tripla de sincronização de autômato mestre aparece somente no autômato mestre ($\mathcal{A}^{\iota(e)}$) e uma dupla de sincronização de autômato escravo só aparece no autômato escravo ($\mathcal{A}^{(i)}, i \in \eta^{(e)}, i \neq \iota^{(e)}$)

A restrição 3 afirma que as taxas de ocorrência de um evento sincronizante e devem aparecer somente nas triplas de sincronização do seu autômato mestre ($\mathcal{A}^{(e)}$). Os outros autômatos referentes a e (autômatos escravos) têm triplas com taxas constantes iguais a um (1.0) ou taxas funcionais que valem 0 ou 1. Relembrando que essa atribuição de autômato *mestre* pode ser arbitrária. A escolha do autômato mestre é indiferente da semântica do evento sincronizante.

Restrição 4 *Uma função de atingibilidade F é bem definida se e somente se o conjunto de estados atingíveis (R) é um grafo de transição fortemente conexo.*

A quarta restrição assegura irredutibilidade da cadeia de Markov correspondente a SAN e permite empregar os teoremas padrões.

Restrição 5 *Uma SAN é bem definida se e somente se*

- 5.1. *todos seus autômatos são bem definidos;*
- 5.2. *todos seus eventos locais são bem definidos*
- 5.3. *todos seus eventos sincronizantes são bem definidos;*
- 5.4. *sua função de atingibilidade é bem definida.*

Todas as restrições precedentes são indispensáveis para determinar uma SAN bem definida.

3.2 Descritor markoviano

O descritor markoviano é uma fórmula algébrica que permite escrever de forma compacta o gerador infinitesimal da cadeia de Markov correspondente a uma SAN pelo viés de uma fórmula matemática [6, 12, 13]. Esta fórmula matemática descreve, a partir das matrizes de transição de cada autômato, o gerador infinitesimal da cadeia de Markov associada à SAN .

A todo autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ são associadas:

- uma matriz agrupando todas as taxas de transições locais, chamada $Q_l^{(i)}$, e
- $2E$ matrizes agrupando todas as triplas e duplas de sincronização para os eventos e do conjunto ε , chamada $Q_{e^+}^{(i)}$ e $Q_{e^-}^{(i)}$.

Sejam

$Q_j^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$ o elemento da matriz $Q_j^{(i)}$ na linha $x^{(i)}$ e na coluna $y^{(i)}$, onde $i \in [1..N]$ e $j \in \{l, e^+, e^-\}$;

I_{n_i} a matriz identidade de ordem n_i , onde $i \in [1..N]$;

Definição 10 *Os elementos da matriz de transição local do autômato $\mathcal{A}^{(i)}$ são definidos por:*

10.1. $\forall l^{(i)} \in \lambda, \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in S^{(i)}$ tal que $y^{(i)} \in \text{succ}_{l^{(i)}}(x^{(i)})$ e $x^{(i)} \neq y^{(i)}$;

$$Q_l^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = \sum_{l^{(i)} \in \lambda} \tau_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}] \pi_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}];$$

$$10.2. \forall x^{(i)} \in S^{(i)} \\ Q_i^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = - \sum_{l^{(i)} \in \lambda y^{(i)} \in \text{succ}_{l^{(i)}}(x^{(i)})} \tau_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}] \pi_{l^{(i)}}[x^{(i)}, y^{(i)}];$$

A definição 10.1 corresponde aos elementos não diagonais da matriz de transição local (taxas dos eventos locais), ao passo que a definição 10.2 corresponde aos elementos diagonais (ajuste diagonal das taxas dos eventos locais).

Definição 11 As matrizes das transições sincronizantes representam a ocorrência do evento $e \in \varepsilon$ são definidas por:

$$11.1. \forall i \notin \eta^{(e)} \\ Q_{e^+}^{(i)} = I_{n_i}; \\ 11.2. \forall i \in \eta^{(e)}, \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in S^{(i)} \text{ tal que } y^{(i)} \in \text{succ}_e(x^{(i)}) \\ Q_{e^+}^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = \tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] \pi_e[x^{(i)}, y^{(i)}]; \\ 11.3. \forall i \in \eta^{(e)}, \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in S^{(i)} \text{ tal que } y^{(i)} \notin \text{succ}_e(x^{(i)}) \\ Q_{e^+}^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = 0;$$

A definição 11.1 corresponde aos autômatos que não dizem respeito ao evento sincronizante e . A definição 11.2 define os elementos não nulos (diagonais ou não) das matrizes para os autômatos referentes ao evento e . A definição 11.3 define os elementos nulos das matrizes para os autômatos referentes ao evento e . É interessante lembrar que a mesma formulação é utilizada para todos os autômatos referentes a $(\mathcal{A}^{(i)})$ onde $i \in \eta^{(e)}$, sejam mestre ou escravo.

Definição 12 As matrizes de transição sincronizadas que representam o ajuste necessário à ocorrência do evento $e \in \varepsilon$ são definidas por:

$$12.1. \forall i \notin \eta^{(e)} \\ Q_{e^-}^{(i)} = I_{n_i}; \\ 12.2. \forall x^{(\iota^{(e)})} \in S^{(\iota^{(e)})} \\ Q_{e^-}^{(\iota^{(e)})}(x^{(\iota^{(e)})}, x^{(\iota^{(e)})}) = - \sum_{y^{(\iota^{(e)})} \in \text{succ}_e(x^{(\iota^{(e)})})} \tau_e[x^{(\iota^{(e)})}, y^{(\iota^{(e)})}] \pi_e[x^{(\iota^{(e)})}, y^{(\iota^{(e)})}]; \\ 12.3. \forall i \in \eta^{(e)}, i \neq \iota^{(e)} \text{ e } \forall x^{(i)} \in S^{(i)} \\ Q_{e^-}^{(i)}(x^{(i)}, x^{(i)}) = \sum_{y^{(i)} \in \text{succ}_e(x^{(i)})} \pi_e[x^{(i)}, y^{(i)}]; \\ 12.4. \forall i \in \eta^{(e)}, \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in S^{(i)} \text{ e } x^{(i)} \neq y^{(i)} \\ Q_{e^-}^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = 0;$$

A definição 12.1 corresponde aos autômatos que não dizem respeito ao evento sincronizante e . A definição 12.2 corresponde aos elementos não nulos da matriz do autômato mestre do evento e , ao passo que a definição 12.3 corresponde aos autômatos escravos. A definição 12.4 corresponde aos elementos nulos das matrizes dos autômatos referentes ao evento sincronizante e (essas matrizes são diagonais).

Definição 13 O gerador infinitesimal markoviano Q correspondente a cadeia de Markov associada a uma SAN bem definida é definido pela fórmula tensorial chamada Descritor Markoviano [6, 12, 13]:

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q_l^{(i)} + \sum_{e \in \varepsilon} \left(\bigotimes_{i=1}^N Q_{e^+}^{(i)} + \bigotimes_{i=1}^N Q_{e^-}^{(i)} \right)$$

Uma vez que toda soma tensorial é equivalente a uma soma de produtos tensoriais particulares, o descritor pode ser apresentado por:

$$Q = \sum_{j=1}^{(N+2E)} \bigotimes_{i=1}^N Q_j^{(i)} \quad (1)$$

$$\text{onde } Q_j^{(i)} = \begin{cases} I_{n_i} & \text{para } j \leq N \text{ e } j \neq i; \\ Q_l^{(i)} & \text{para } j \leq N \text{ e } j = i; \\ Q_{(j-N)^+}^{(i)} & \text{para } N < j \leq N + E; \\ Q_{(j-(N+E))^-}^{(i)} & \text{para } j > N + E; \end{cases}^3$$

A Tabela 1 representa as matrizes de transição necessárias à escrita da equação 1. A parte superior da tabela contém as matrizes com as transições locais dos autômatos e corresponde à soma tensorial $\bigoplus_{i=1}^N Q_l^{(i)}$. A parte inferior da tabela é subdividida nas matrizes contendo as taxas de ocorrência dos eventos sincronizantes (e^+) e as matrizes diagonais que fazem o ajuste (tornam a soma das linhas igual a zero) destes eventos (e^-).

Σ	N		$Q_l^{(1)}$	\otimes_g	I_{n_2}	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$I_{n_{N-1}}$	\otimes_g	I_{n_N}	
			I_{n_1}	\otimes_g	$Q_l^{(2)}$	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$I_{n_{N-1}}$	\otimes_g	I_{n_N}	
						\vdots						
			I_{n_1}	\otimes_g	I_{n_2}	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$Q_l^{(N-1)}$	\otimes_g	I_{n_N}	
			I_{n_1}	\otimes_g	I_{n_2}	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$I_{n_{N-1}}$	\otimes_g	$Q_l^{(N)}$	
	$2E$	e^+		$Q_{1^+}^{(1)}$	\otimes_g	$Q_{1^+}^{(2)}$	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$Q_{1^+}^{(N-1)}$	\otimes_g	$Q_{1^+}^{(N)}$
				$Q_{E^+}^{(1)}$	\otimes_g	$Q_{E^+}^{(2)}$	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$Q_{E^+}^{(N-1)}$	\otimes_g	$Q_{E^+}^{(N)}$
		e^-		$Q_{1^-}^{(1)}$	\otimes_g	$Q_{1^-}^{(2)}$	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$Q_{1^-}^{(N-1)}$	\otimes_g	$Q_{1^-}^{(N)}$
							\vdots					
				$Q_{E^-}^{(1)}$	\otimes_g	$Q_{E^-}^{(2)}$	\otimes_g	\cdots	\otimes_g	$Q_{E^-}^{(N-1)}$	\otimes_g	$Q_{E^-}^{(N)}$

Tabela 1: Descritor Markoviano

³Essa fórmula utiliza como conjunto de identificadores dos eventos sincronizantes ε o intervalo $[1..E]$.

4 Exemplos de Modelagem

Este capítulo mostra a capacidade das SAN em modelar diversos tipos de problemas e conseqüentemente obter soluções eficientes para estes através da ferramenta de software PEPS[18]. No Apêndice A deste relatório os exemplos apresentados são descritos pela gramática de definição das SAN utilizada na ferramenta PEPS.

4.1 Compartilhamento de Recursos

O primeiro exemplo apresentado descreve uma situação de compartilhamento de P recursos por N clientes (Figura 3). Neste exemplo, N autômatos modelam o estado de cada um dos clientes entre os estados *ativo* (o cliente está de posse de um recurso) e *repouso* (o cliente não possui o recurso). A liberação de um recurso é representada pelos eventos locais $l_1^{(i)}$ que ocorrem com taxa μ_i de forma completamente independente (a probabilidade de ocorrência nas triplas dos eventos locais $l_1^{(i)}$ é igual a 1). Por outro lado, a alocação de um recurso é representada pelos eventos $l_2^{(i)}$, onde temos além da sua taxa de ocorrência (λ_i) uma probabilidade funcional (f) que retorna 1 caso exista pelo menos um recurso disponível (número de autômatos utilizando recursos menor que P) e retorna 0 no caso contrário. Note-se que neste modelo temos representado de forma compacta 2^N estados globais, porém nem todos estes estados são atingíveis⁴. Este modelo descreve toda a interação entre os autômatos através da probabilidade funcional (f), logo não foi necessário utilizar nenhum evento sincronizante.

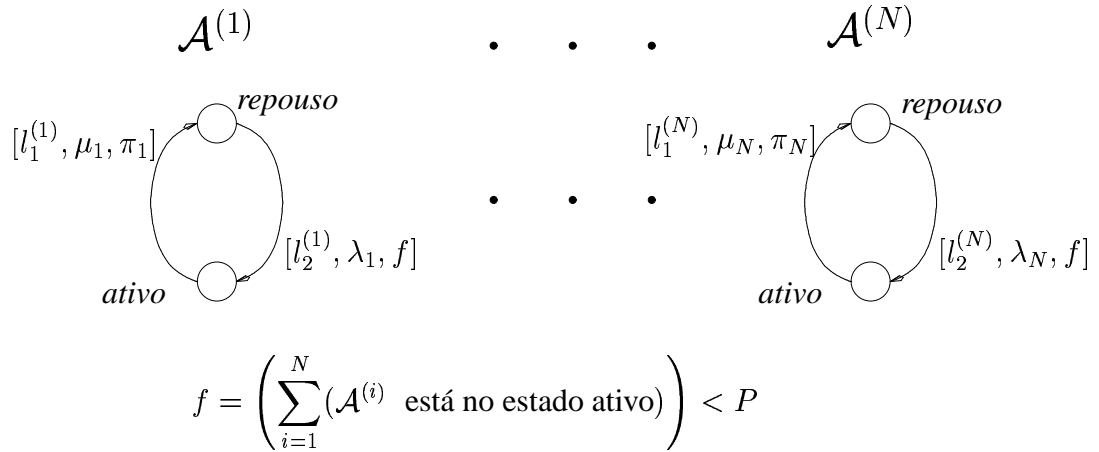


Figura 3: Modelo SAN para compartilhamento de recursos

4.2 Rede de Filas de Espera

O segundo exemplo apresentado descreve uma rede de filas de espera aberta com três filas com capacidade limitada e bloqueio. Neste exemplo admitimos a rede de filas descrita na Figura 4, onde σ_i é o tempo médio de atendimento na fila i , K_i é o número máximo de clientes presentes na fila i e C_i é o número de servidores na fila i .

Neste modelo utiliza-se um autômato para representar cada uma das filas. As chegadas de clientes na primeira fila e as saídas da última fila são representadas por eventos locais. A passagem

⁴O número estados atingíveis para um modelo com N clientes compartilhando P recursos é igual a $\sum_{i=0}^P C_i^N$. Onde C_i^N representa o número de combinações não ordenadas de i elementos tirados de um conjunto contendo um total de N elementos.

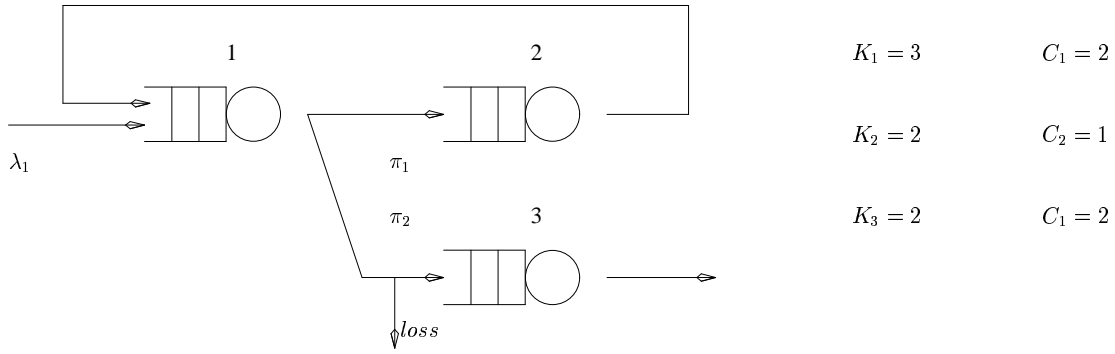


Figura 4: Rede de filas de espera aberta com capacidade limitada e bloqueio

de clientes entre as filas é representada por eventos sincronizantes. A Figura 5 representa o modelo SAN para a rede de filas de espera aberta. Posto que todas as probabilidades expressas neste modelo são iguais a 1, para clareza da leitura as triplas e duplas foram abreviadas eliminando-se as probabilidades. Neste exemplo não foi necessária a utilização de taxas ou probabilidades funcionais e por coincidência também não temos estados globais inatingíveis neste modelo. Cabe salientar que a ausência de probabilidades e taxas funcionais não está relacionada com a ausência de estados inatingíveis. Uma discussão mais ampla sobre modelos em SAN para redes de filas de espera com capacidade limitada pode ser encontrada em [8].

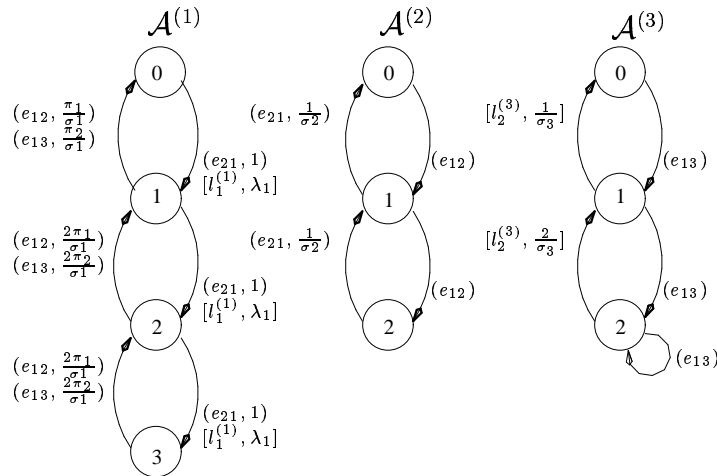


Figura 5: Modelo SAN para a rede de filas de espera aberta

5 Conclusão

Todo modelo em SAN pode ser traduzido em uma cadeia de Markov avaliando-se o resultado das operações tensoriais expressas pelo descritor Markoviano exposto na Definição 13 (seção 3.2). No entanto, a forma mais eficiente de obtenção da solução estacionária de um modelo SAN consiste em manter a estrutura tensorial do modelo e resolvê-lo através de métodos aproximativos como os implementados na ferramenta *PEPS 2000*. Estes métodos são baseados em uma implementação eficiente de um algoritmo que permite a multiplicação de um vetor (de probabilidades) pelo descritor (no formato tensorial). A ferramenta *PEPS 2000* implementa os métodos

da potência, Arnoldi e GMRES [16] utilizando diversas otimizações numéricas que mantêm um compromisso entre a memória utilizada e o tempo de processamento.

O uso de SAN apresenta grandes vantagens quando comparado à abordagem clássica de cadeias de Markov. No entanto, o problema de explosão de espaço de estados ainda resta em aberto, pois ainda que tenha-se aumentado o limite dos modelos que podemos tratar, alguns compromissos tiveram que ser feitos. Como podemos observar no exemplo de compartilhamento de recursos, alguns modelos SAN podem incluir um grande número de estados globais inatingíveis. Por si só este fator pode degradar a eficiência do uso do formalismo SAN. Neste sentido, trabalhos recentes [4] propõem a solução de modelos SAN que utilizam vetores de probabilidade que são reduzidos ao espaço de estados atingível e não ao espaço de estados global (espaço de estados produto).

Os trabalhos futuros no desenvolvimento do formalismo SAN se dividem em três grandes grupos: trabalhos de desenvolvimento das bases teóricas, trabalhos de programação e trabalhos de popularização do formalismo SAN. Os trabalhos de desenvolvimento das bases teóricas deverão dirigir-se a descoberta de novas propriedades das operações tensoriais que permitam a otimização de algoritmos de multiplicação vetor-descritor tanto para escala de tempo contínua, quanto para escala de tempo discreta. Os trabalhos de programação deverão centrar-se no aprimoramento de métodos numéricos e sua respectiva implementação dentro da ferramenta de software *PEPS*, cuja uma nova versão incorporando a definição formal descrita neste artigo e outros avanços recentes está prevista ainda para este ano de 2002. Finalmente os trabalhos de popularização do formalismo SAN terão por objetivo desenvolver um número cada vez maior de aplicações às mais diversas realidades com o propósito de avaliar tanto o desempenho como a confiabilidade destas realidades.

Referências

- [1] M.Ajmone-Marsan, G.Balbo, G.Conte, S.Donatelli, G.Franceschinis. **Modelling with generalized stochastic Petri nets**. John Wiley, 1995.
- [2] F.Bacelli. *Is there life outside Markov?* In: **5th International Workshop on Petri Nets and Performance Models**. IEEE Computer Society Press, 1993.
- [3] F.Baskett, K.M.Chandy, R.R.Muntz, F.G.Palacios. *Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers*. **Journal of the ACM**, vol. 22, no. 2, 1975, pp. 248-260.
- [4] A.Benoit, B.Plateau, W.J.Stewart. **Memory efficient iterative methods for stochastic automata networks**. INRIA, Rapport de Recherche no. 4259, 2001. Anonymous ftp <ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Publication/RR/RR-4259.ps.gz>
- [5] S.Donatelli. *Kronecker algebra and (stochastic) Petri nets: Is it worth the effort?* In: **Proceedings of the 22th International Conference on Application and Theory of Petri Nets**. LNCS 2075, Springer, 2001.
- [6] P.Fernandes. **Méthodes numériques pour la solution de systèmes Markoviens à grand espace d'états**. INPG, Grenoble, 1998. (Ph.D. thesis)
- [7] P.Fernandes, B.Plateau, W.J.Stewart. *Efficient descriptor-vector multiplication in stochastic automata networks*. **Journal of the ACM**, vol. 45, no. 3, 1998, pp. 381-414.

- [8] P.Fernandes, B.Plateau. *Modeling finite capacity queueing networks with stochastic automata networks*. In: **Proceedings of the Fourth International Workshop on Finite Capacity Queueing Systems**. University of Bradford, 2000.
- [9] L.Kleinrock. **Queueing theory** (vol. 1). John Wiley, 1975.
- [10] A.S.Miner, G.Ciardo, S.Donatelli. *Using the exact state space of a Markov model to compute approximate stationary measures*. **Proceedings of the ACM SIGMETRICS**, Santa Clara, CA, USA, June, 2000, pp. 207-216.
- [11] M.F.Neuts. **Matrix geometric solutions in stochastic models, an algorithmic approach**. John Hopkins University Press, 1981.
- [12] B.Plateau. **De l'Evaluation du Parallélisme et de la Synchronisation**. Paris-Sud, Orsay, 1984.
- [13] B.Plateau, K.Atif. *Stochastic automata networks for modelling parallel systems*. **IEEE transactions on software engineering**, vol. 17, no. 10, 1991, pp. 1093-1108.
- [14] B.Plateau, W.J.Stewart. **Stochastic automata networks: product forms and iterative solutions**. INRIA, Rapport de Recherche no. 2939, 1996. Anonymous ftp <ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Publication/RR/RR-2939.ps.gz>
- [15] M.Reiser, S.S.Lavenberg. *Mean-value analysis of closed multichain networks*. **Journal of the ACM**, vol. 27, no. 2, 1980, pp. 313-322.
- [16] Y.Saad. **Iterative methods for sparse linear systems**. Boston: PWS Publishing Company, 1995.
- [17] W.J.Stewart. **Introduction to the numerical solution of Markov chains**. Princeton University Press, 1994.
- [18] **PEPS Project**: Performance Evaluation of Parallel Systems. <http://www-apache.imag.fr/software/peps/>

A Exemplos Modelados pela Gramática da Ferramenta PEPS

A seguir é mostrado os dois exemplos modelados na Seção 4 descritos com o uso da gramática da ferramenta PEPS[18].

A.1 Compartilhamento de Recursos

Uma situação de P recursos compartilhados por N clientes, como exemplificado na Seção 4.1, é modelado da seguinte maneira na gramática da ferramenta PEPS:

Arquivo SAN do modelo mutex

```
identifiers{
  mu = 9; //taxa para liberar o recurso
  lambda = 6; //taxa de requisição do recurso
  F = (nb using < 4); //função de acesso ao recurso
}

reachability = (nb using <= 4);

network mutex (continuous){
  automaton process[12]{ //process é replicado 12 vezes
    state sleeping{trans (using){loc alloc (lambda,F);}}
    state using{trans (sleeping){loc leave (mu,1);}}
  }
}

results{
  full4 = (nb using==4); //probalidade de ter 4 recursos ocupados
  full3 = (nb using==3); //probalidade de ter 3 recursos ocupados
  full2 = (nb using==2); //probalidade de ter 2 recursos ocupados
  full1 = (nb using==1); //probalidade de ter 1 recurso ocupado
  empty = (nb using==0); //probalidade de nenhum recurso estar ocupado

  average = nb using; //número médio de recursos ocupados
}
```

Para o modelo acima foram considerados $N = 12$ e $P = 4$, no entanto tanto a quantidade de recursos como a de clientes pode ser facilmente mudada com a alteração de poucos parâmetros.

A.2 Rede de Filas de Espera

Modela-se um Rede de Filas de Espera, como a apresentada na Seção 4.2, na gramática da ferramenta PEPS da maneira que se segue:

Arquivo SAN do modelo de Rede de Filas de Espera

```
identifiers{
  Ci1 = 2; //número de servidores da fila 1
  Ci2 = 1; //número de servidores da fila 2
  Ci3 = 2; //número de servidores da fila 3
```

```

lambda1 = 5; //taxa de chegada de clientes na fila 1
Si1 = 0.2; //tempo de serviço da fila 1
Si2 = 0.3; //tempo de serviço da fila 2
Si3 = 0.1; //tempo de serviço da fila 3

mu1 = (min [Ci1, st q1])/Si1; //taxa de serviço da fila 1
mu2 = (min [Ci2, st q2])/Si2; //taxa de serviço da fila 2
mu3 = (min [Ci3, st q3])/Si3; //taxa de serviço da fila 3

rot_1to2 = 0.3 * mu1;
rot_1to3 = 0.7 * mu1;
rot_2to1 = mu2;
}

network oqn (continuous){
  automaton q1{ //fila 1, capacidade 3
    state c0 {trans (c1){loc l1 (lambda1);
              syn e21;}}
    state c1 {trans (c0){mst e12 (rot_1to2);
                        mst e13 (rot_1to3);}
              trans (c2){loc l1 (lambda1);
                          syn e21;}}
    state c2 {trans (c1){mst e12 (rot_1to2);
                        mst e13 (rot_1to3);}
              trans (c3){loc l1 (lambda1);
                          syn e21;}}
    state c3 {trans (c2){mst e12 (rot_1to2);
                        mst e13 (rot_1to3);}}
  }

  automaton q2{ //fila 2, capacidade 2
    state c0 {trans (c1){syn e12;}}
    state c1 {trans (c0){mst e21 (rot_2to1);}
              trans (c2){syn e12;}}
    state c2 {trans (c1){mst e21 (rot_2to1);}}
  }

  automaton q3{ //fila 3, capacidade 2
    state c0 {trans (c1){syn e13;}}
    state c1 {trans (c0){loc l2 (mu3);}
              trans (c2){syn e13;}}
    state c2 {trans (c1){loc l2 (mu3);}
              trans (c2){syn e13;}}
  }
}

results{
  n1 = st q1; //população média da fila 1

```

```
n2 = st q2; //população média da fila 2
n3 = st q3; //população média da fila 3
}
```

Assumiu-se nesse exemplo a taxa de chegada da fila 1 (λ_1) como 6 clientes por unidade de tempo. Para o tempo de serviço de cada fila (S_i) assumiu-se $S_1 = 0.2$, $S_2 = 0.3$ e $S_3 = 0.1$, para as filas 1, 2 e 3 respectivamente. As probabilidades de rotação da fila 1 para as filas 2 (π_1) e 3 (π_2) definiu-se como sendo $\pi_1 = 0.3$ e $\pi_2 = 0.7$.