



Lista 2: Teoria de Conjuntos

1) Determina os conjuntos A e B tais que:

$$A' = \{f, g, h, l\}, A \cap B = \{d, e\} \text{ e } A \cup B = \{a, b, d, e, f\}.$$

2) Sejam A, B e C conjuntos. Prova que:

a) $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$

b) $A - B = B' - A'$

c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

d) $(A - B)' = A' \cup B$

3) Sejam A, B e C conjuntos. Verifique se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando a sua resposta.

a) $A \cup (B - A) = A \cup B$

b) $A \cap B = A \cap C \leftrightarrow B = C$

c) $(A' \cup B')' = A \cap B$

d) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$

e) $A \cap B = \emptyset \rightarrow A \subseteq B'$

f) $A - B = A - C \leftrightarrow B = C$

g) $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$

h) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

4) Sejam A um conjunto qualquer não vazio e o produto cartesiano $A \times A$.
A afirmação verdadeira é:

a) $A \subset A \times A$ b) $A \times A \not\subset A \times A$ c) $A \times A \neq A$ d) $\emptyset \not\subset A \times A$ e) nenhuma

5) Se $A = \{\emptyset\}$, então:

a) $P(A)$ é um conjunto unitário b) $P(A)$ é um conjunto vazio c) $\emptyset \notin P(A)$ d) $P(A)$ é um conjunto par
e) $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

6) Sendo $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ pode-se afirmar que:

a) A é o conjunto das partes do conjunto $\{a,b\}$
b) $b \in A$ c) $\{a\} \notin A$ d) $\{a\} \subset A$ e) $\{a,b\} \in A$

7) Quando: $A \subseteq B$ e $A \neq B$, qual(ais) afirmativa(s) abaixo é(são) verdadeira(s)?

a) $A \cup B = B$ b) $A \cap B = B$ c) $A - B = \emptyset$ d) $A \cap B = A$

8) Se A e B são subconjuntos de X, dentre as proposições seguintes a falsa é:

a) $(A \cap B) \subseteq A, \forall A, B \in P(X)$
b) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B), \forall A, B \in P(X)$
c) $\emptyset \subseteq (A \cap B), \forall A, B \in P(X)$
d) $B \subseteq (A \cap B), \forall A, B \in P(X)$
e) $(A \cup A) \cap B = (B \cap B) \cap A, \forall A, B \in P(X)$

Exercícios complementares:

Referência: Menezes P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática

| Página | Exercícios |
|--------|--------------------------|
| 63 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 10 |

Respostas

1. $A = \{a, b, d, e\}$, $B = \{d, e, f\}$

2. a) Sejam A, B conjuntos tais que $A \subseteq B$. Seja $x \in A$.

Como $A \subseteq B$, temos que $x \in B$.

Então $x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$. Portanto, $A \subseteq A \cap B$.

Por outro lado, temos que: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$. Portanto $x \in A$.

Temos então que $A \cap B \subseteq A$. Desta forma podemos concluir que $A \cap B = A$.

Logo, $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

b) Sejam A, B conjuntos quaisquer.

$$\text{Então: } B' - A' = \{x / x \in B' \wedge x \notin A'\} = \{x / x \notin B \wedge x \in A\} = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = A - B$$

Logo, $A - B = B' - A'$.

c) Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Então:

$$\forall x, x \in A \cup (B - C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B - C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (C - A)$$

Logo, $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

d) Sejam A, B conjuntos quaisquer.

$$\forall x, x \in (A - B)' \Leftrightarrow x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A' \cup B$$

Logo, $(A - B)' = A' \cup B$.

3. a) A proposição é **verdadeira**. PROVA:

Sejam A e B conjuntos.

$$\forall x, x \in A \cup (B - A) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cup B.$$

Logo, $A \cup (B - A) = A \cup B$.

b) A proposição é **falsa**. PROVA:

Existem os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ e $C = \{1, 5, 9\}$ tais que:

$$A \cap B = \{1\} \wedge A \cap C = \{1\}, \text{ ou seja: } A \cap B = A \cap C.$$

Mas $B \neq C$.

$$\text{Logo, } \neg (A \cap B = A \cap C \rightarrow B = C).$$

Logo, a proposição $(A \cap B = A \cap C \leftrightarrow B = C)$ é falsa.

c) A proposição é **verdadeira**. PROVA:

Sejam A e B conjuntos. Então, usando uma das leis de De Morgan para conjuntos, temos:

$$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B.$$

Logo, $(A' \cup B')' = A \cap B$.

d) A proposição é **falsa**. PROVA:

Existem os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{1, 5\}$ tais que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e}$$

$$(A \cup B) - C = \{2, 3, 4\}$$

Mas:

$$B - C = \{4, 5\} - \{1, 5\} = \{4\}$$

$$A \cup (B - C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Então, neste caso, $(A \cup B) - C \neq A \cup (B - C)$.

Logo, a proposição é falsa.

e) A proposição é **verdadeira**. PROVA:

Sejam A e B conjuntos quaisquer tais que $A \cap B = \emptyset$. Então:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin B, \text{ pois } A \cap B = \emptyset.$$

$$\text{Mas: } x \notin B \Leftrightarrow x \in B'.$$

$$\text{Logo, } \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B'.$$

Conclusão : $A \subseteq B'$.

f) A proposição é **falsa**. PROVA:

Existem os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{2, 4\}$ tais que

$A - B = \{1\}$ e $A - C = \{1\}$

Mas $B \neq C$.

g) A proposição é **falsa**. PROVA:

Se escolhermos $A = \{1, 2\}$ e $B = \emptyset$, teremos:

$A \times B = \emptyset$ e $B \times A = \emptyset$

Porém $A \neq B$.

h) A proposição é **falsa**. PROVA:

Existem $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$ onde

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $(A \cup B) \cap C = \{4\}$.

$B \cap C = \{4\}$ e $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 4\}$.

Então $\{4\} \neq \{1, 2, 4\}$.

4. c

5. d

6. e

7. a, c, d

8. d