



Tópico 9 – Derivadas Parciais

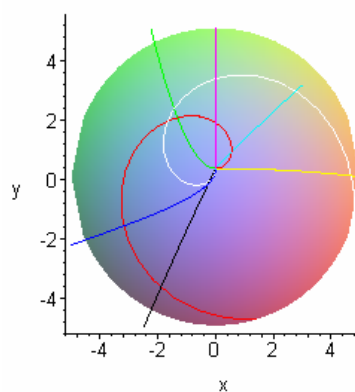
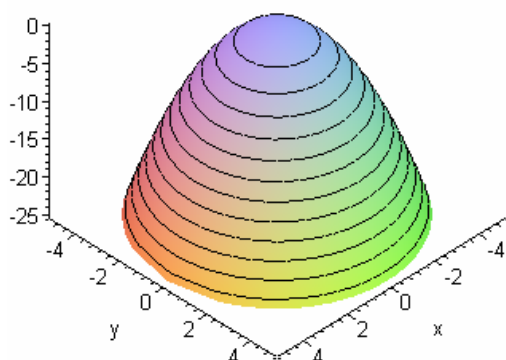
Consulta Indicada: ANTON, H. **Cálculo: Um novo horizonte**. Volume 2. Páginas 323 a 342

Limites de Funções de Duas ou Mais Variáveis

Dada uma função $f = f(x,y)$, dizemos que o limite de f é igual a L quando (x,y) se aproxima de um ponto de referência (a,b) , se pudermos tornar os valores de $f(x,y)$ tão próximos de L conforme (x,y) se aproxima de (a,b) . Nesse caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L.$$

O conceito de limite novamente está associado ao conceito de tendência.



Perguntas Importantes:

1. De quantas formas diferentes podemos nos aproximar de um ponto no eixo real?
2. De quantas formas diferentes podemos nos aproximar de um ponto no plano?
3. Como você relaciona essas informações com o conceito de limite?

Limites de Funções de Duas Variáveis: Dificuldades de Cálculo

Para se estimar o limite de uma função de duas variáveis f no ponto (x_0, y_0) é necessário calcular esse valor por todas as trajetórias que passem por (x_0, y_0) . Se em todos os casos o resultado for sempre o mesmo, digamos L , diz-se que o limite existe e que vale L . Caso o limite não exista em alguma trajetória ou dê um valor diferente para trajetórias diferentes, dizemos que o limite não existe.

Exemplo

Calcule o limite da função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ em $(0,0)$:

- a) ao longo da trajetória $x = 0$;
- b) ao longo da trajetória $x = y$;
- c) ao longo da trajetória $y = x^2$;

Qual sua conclusão?

Como se pode intuir, em geral é bastante complicado definir a existência de um limite para uma região “problemática” de uma função. Isso porque não há um raciocínio fortemente estruturado como no caso de limites de funções de uma variável. Essa dificuldade traz algumas conseqüências importantes:

- Como não há um meio geral de se definir o limite de uma função de duas variáveis, torna-se um tanto complicado definir se essa função é contínua;
- Como não há um meio geral de se definir o limite de uma função de duas variáveis, torna-se impraticável definir a existência da derivada dessa função.

Continuidade de Funções de Duas Variáveis

Uma função é contínua se o resultado de sua avaliação em cada ponto é igual a sua tendência ao se aproximar daquele ponto. Isto é, no caso de uma superfície, f ,

$$f \text{ é uma função contínua } \Leftrightarrow \forall (x_0, y_0), \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Como visto, essa definição não é trivial de ser utilizada. Alguns resultados, porém, são conhecidos:

- A soma, a subtração e o produto de funções contínuas é contínua;
- A divisão de funções contínuas é contínua desde que o denominador não se anule;
- A composição de funções contínuas é contínua.

Exemplos

1. Determine se as funções abaixo são contínuas e justifique por quê:

a) $f(x, y) = xe^{xy} + y^{2/3}$

b) $f(x, y) = \cos(xy^3) - |xy|$

c) $f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1 - xy}$

2. Calcule:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$

Derivação de Funções de Duas Variáveis: Derivadas Parciais

Como visto anteriormente, o cálculo de limites com duas ou mais variáveis é difícil, ainda mais em indeterminações.

A definição da derivada de uma função de duas variáveis é dada por

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{d((x, y), (x_0, y_0))}$$

onde $d((x, y), (x_0, y_0))$ é a distância entre os pontos (x, y) e (x_0, y_0) .

Se nos dermos conta de que esta expressão gera, na maior parte das vezes, uma indeterminação, então fica claro que não é possível obter "a" derivada de uma função de duas ou mais variáveis, em geral.

Este problema pode ser contornado através do conceito de derivada parcial.

A derivada parcial de uma função de duas ou mais variáveis é obtida pela derivação de uma curva que represente um caminho sobre a função e paralelo à variável escolhida. Por consequência, as demais variáveis de entrada não variam ao longo desse caminho. Assim, uma derivada parcial é obtida considerando-se apenas uma variável de cada vez.

Ou seja:

- a derivada parcial de f em relação a x considera apenas x como variável. Notações: f_x ou $\frac{\partial f}{\partial x}$
- a derivada parcial de f em relação a y considera apenas y como variável. Notações: f_y ou $\frac{\partial f}{\partial y}$
- a derivada parcial de f em relação a z considera apenas z como variável. Notações: f_z ou $\frac{\partial f}{\partial z}$
- etc.

Os procedimentos e regras de derivação são similares aos utilizados para funções de uma variável.

Exemplo: Determine as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

a) $f(x, y) = 2 \cdot x^3 y^2 + 2y + 4x$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercícios

1. Determine as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ das funções:

a) $z = 4x^2y - 5x^3y^2 + 2x - y$

b) $z = x\sqrt{y}$

c) $z = \ln(xy^2)$

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$

e) $z = \frac{2xy}{3x - 2y}$

f) $z = \frac{2x - 3y}{x^2 + 4y}$

g) $z = (2x - y)e^{xy}$

h) $z = 2x^2y \cdot \ln 2y$

i) $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} + \ln e^{xy}$

j) $z = \cos(x+y) - e^{2x} + e^{5y}$

k) $f(x,y) = e^{-x^2} \cos y$

l) $f(x,y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$

2. Mostre que:

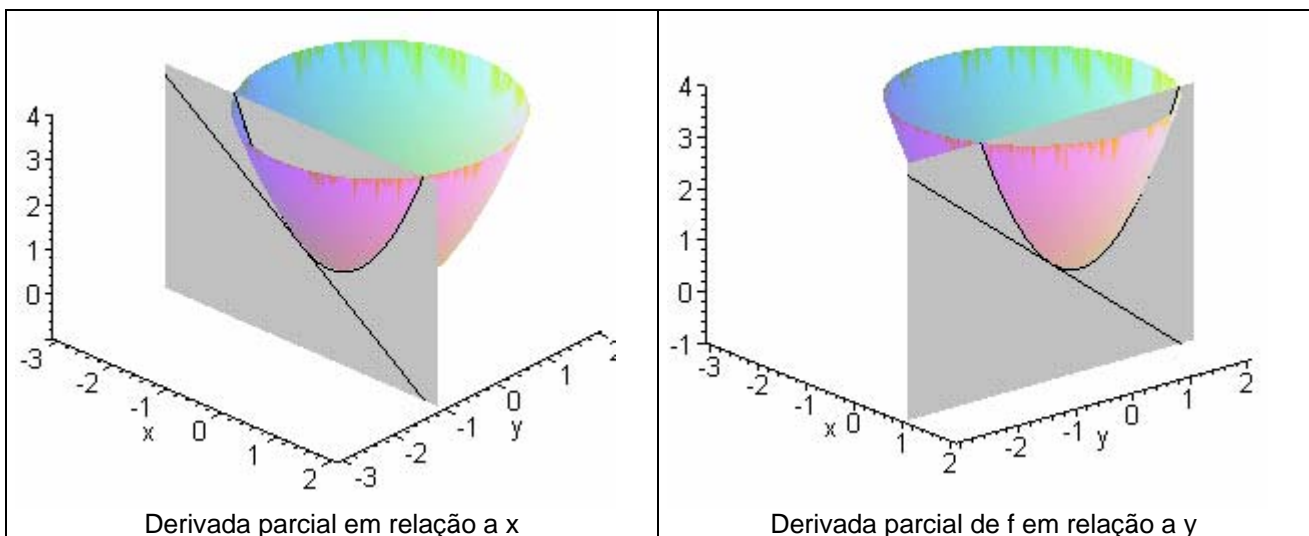
a) se $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, então $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

b) se $z = \ln \frac{2y^2}{x^2}$, então $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

Considere a superfície abaixo, gráfico de uma função $z = f(x,y)$.

Para $y = k$ (constante) a função f se reduz a uma função de uma variável x , $z = f(x,k)$.



Portanto, a derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_1, y_1) representa a declividade da superfície no ponto (x_1, y_1) na direção paralela ao eixo x , isto é $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) = m_t$

Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_1, y_1) representa a declividade da superfície no ponto (x_1, y_1) na direção paralela ao eixo y , isto é $\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = m_t$

Exemplo

Dado $f(x, y) = x^2y + 5y^3$, determine:

- A inclinação de f no ponto $(1, -2)$ na direção do eixo x
- A inclinação de f no ponto $(1, -2)$ na direção do eixo y

Exercícios

3. Encontrar a declividade da reta tangente à curva resultante da intersecção de:

- $z = x^2 + y^2$ com o plano $x = 1$, no ponto $(1, 2, 5)$
- $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 2$, no ponto $(2, 2, 8)$
- $z = \sqrt{34 - 9x^2 - 4y^2}$ com o plano $y = 2$, no ponto $(1, 2, 3)$

4. Dada a função $f(x, y) = y^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, determine :

- o domínio de f
- $f_x(3, 4)$
- $f_y(3, 4)$
- o coeficiente angular da reta tangente à curva que é a intersecção do gráfico de f com o plano $x = 3$ no ponto em que $y = 4$.

5. Seja a função dada por $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

- Represente graficamente o domínio da f
- Encontre $\frac{\partial f}{\partial y}$.

6. Seja a função dada por $f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{y - x}$

- Determine e represente graficamente o domínio da f .
- Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}$

7. Determine as equações da reta tangente à curva que é a intersecção do gráfico de $f(x, y) = \sqrt{10 - x^2 - 2y^2}$ com o plano $y = 1$, no ponto $x = 2$.

Taxas de variação

$\frac{\partial f}{\partial x}$ fornece a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação à x para $y = k$ (constante), isto é, mede a taxa de variação de $f(x, y)$ quando (x, y) se move na direção do eixo x .

$\frac{\partial f}{\partial y}$ fornece a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação à y para $x = k$ (constante), isto é, mede a taxa de variação de $f(x, y)$ quando (x, y) se move na direção do eixo y .

Exercícios

8. Uma placa de metal aquecida está situada em um plano xy de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$. Determine a taxa de variação de T em relação à distância no ponto P(1,2) na direção:

- do eixo das abscissas
- do eixo das ordenadas

9. O volume de um cone circular reto de altura h e raio da base r é dado por:

$$V(h,r) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Qual é a taxa de variação do volume em relação ao raio? Interprete o resultado.

10. O volume V de um cilindro circular reto é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$ onde r representa a medida do raio da base e h a altura do cilindro.

- Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a "r" se "h" permanece constante;
- Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de V em relação a "h" se "r" permanece constante;
- Suponha que "h" tem um valor constante de 4cm mas "r" varia. Determine a taxa de variação de V em relação a "r" quando r = 6cm;
- Suponha que "r" tem um valor constante de 8cm mas "h" varia. Determine a taxa de variação de V em relação a "h" quando h = 10cm;
- Suponha agora que $r = g(t)$ e $h = f(t)$. Determine a taxa de variação de V em relação a "t";

- Mostre que a solução de e) tem a forma $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas parciais de ordem superior são obtidas da mesma forma que as derivadas parciais de primeira ordem. No entanto, deve-se observar que para uma função de duas variáveis existirão duas derivadas de segunda ordem para cada derivada parcial, ou seja, as derivadas de segunda ordem de f são dadas por:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$
ou	ou	ou	ou
$f_{xx} = (f_x)_x$	$f_{yy} = (f_y)_y$	$f_{xy} = (f_x)_y$	$f_{yx} = (f_y)_x$
Derivando duas vezes em relação a x	Derivando duas vezes em relação a y	Derivando primeiro em relação a x e depois em relação a y	Derivando primeiro em relação a y e depois em relação a x
Derivadas Puras		Derivadas mistas	

Atenção à notação!

Note que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_y$, isto é, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$.

Exemplo

Determine as derivadas de segunda ordem das funções dadas:

a) $f(x, y) = x^2 y^3 + x^4 y$

b) $f(x, y) = y^2 e^x + y$

c) $f(x, y) = x^2 y e^{xy}$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Observação

As derivadas parciais de segunda ordem mistas são iguais para funções contínuas com derivadas parciais contínuas.

Exercícios

11) Determinar as derivadas parciais de segunda ordem das funções dadas por:

a) $z = x^2 y - xy^2 + 2x - y$

b) $z = xy$

c) $z = \ln(xy)$

d) $z = e^{-xy^2}$

e) $z = \frac{2y}{x}$

f) $z = x^3 y^2$

g) $z = x e^{-y}$

h) $z = x \ln e^{xy}$

12) Seja a função dada por $z = \frac{x}{y}$.

a) Faça a curva de nível para $z = 2$.

b) Encontre as derivadas parciais de segunda ordem da z .

Respostas

1) a) $f_x(x,y)=8xy-15x^2y^2+2$; $f_y(x,y)=4x^2-10x^3y-1$

b) $f_x(x,y)=\sqrt{y}$; $f_y(x,y)=\frac{x}{2\sqrt{y}}$

c) $f_x(x,y)=\frac{1}{x}$; $f_y(x,y)=\frac{2}{y}$

d) $f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$; $f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

e) $f_x(x,y)=\frac{-4y^2}{(3x-2y)^2}$; $f_y(x,y)=\frac{6x^2}{(3x-2y)^2}$

f) $f_x(x,y)=\frac{-2x^2+6xy+8y}{(x^2+4y)^2}$; $f_y(x,y)=\frac{-3x^2-8x}{(x^2+4y)^2}$

g) $f_x(x,y)=e^{xy}(2xy-y^2+2)$; $f_y(x,y)=e^{xy}(2x^2-xy-1)$

h) $f_x(x,y)=4xy \ln 2y$; $f_y(x,y)=2x^2(\ln 2y+1)$

i) $f_x(x,y)=-\frac{1}{x^2}+y$; $f_y(x,y)=\frac{1}{2y^2}+x$

j) $f_x(x,y)=-\operatorname{sen}(x+y)-2e^{2x}$; $f_y(x,y)=-\operatorname{sen}(x+y)+5e^{5x}$

k) $f_x(x,y)=e^{x^2} 2x \cos y$; $f_y(x,y)=-e^{x^2} \operatorname{sen} y$

l) $f_x(x,y)=2x \cos(x^2+y^2)$; $f_y(x,y)=2y \cos(x^2+y^2)$

3) a) 4 b) 4 c) -3 4) a) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ b) $-\frac{3}{125}$ c) $\frac{996}{125}$ d) $\frac{996}{125}$

5) a) Dom f = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \geq 0\}$ b) $f_y(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$

6) a) Dom f = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 0\}$ b) $f_x(x, y) = \frac{2xy + 2y^2 - x^2}{(y-x)^2}$

7) $y = 1$ e $z = -x+4$ 8) a) 200 b) 400

9) $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r h$. O volume aumenta aproximadamente em $2/r$ à medida que r cresce uma unidade e a altura permanece constante.

10) a) $\frac{\partial V}{\partial r}(r, h) = 2r\pi h$ b) $\frac{\partial V}{\partial h}(r, h) = \pi r^2$ c) $\frac{\partial V}{\partial r}(6,4) = 48\pi$ d) $\frac{\partial V}{\partial h}(8,10) = 64\pi$

e) $\frac{dV}{dt}(r, h) = 2r\pi h \cdot \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

11) a) $2y$; $-2x$; $2x-2y$ b) 0 ; 0 ; 1 c) $-\frac{1}{x^2}$; $-\frac{1}{y^2}$; 0 d) $y^4 e^{-xy^2}$; $2xe^{-xy^2}(2xy^2 - 1)$; $2e^{-xy^2}(xy^3 - y)$

e) $\frac{4y}{x^3}$; 0 ; $-\frac{2}{x^2}$ f) $6xy^2$; $2x^3$; $6x^2y$ g) 0 ; xe^{-y} ; $-e^{-y}$ h) $2y$; 0 ; $2x$

12) a) $y = \frac{x}{2}$ b) $z_{xx}(x, y) = 0$, $z_{yy} = \frac{2x}{y^3}$, $z_{xy}(x, y) = z_{yx}(x, y) = -\frac{1}{y^2}$

Exercícios Complementares

Referência: Anton, H. Cálculo: Um Novo Horizonte. Volume 2.

Página	Exercícios
330	9, 11, 13, 15, 17
338	1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 23, 25, 27, 29, 31
340	43, 45, 47, 49, 51, 55, 73 (importante)
341	81, 83, 87