MODA ESTATÍSTICA: RELAÇÕES CONCEITUAIS

Ancilla Dall'Onder Zat[1]

Resumo

Este trabalho visa uma reflexão sobre a base conceitual da moda estatística, suas origens, processos de determinação, suas aplicações e processo de aprendizagem. A moda é uma estatística descritiva que indica o valor que mais se repete num conjunto de valores. Karl Pearson utilizou esse termo pela primeira vez em 1895 influenciado pela expressão "estar na moda" quando alguma coisa era freqüente. Pode ser obtida pela simples observação dos dados de um conjunto, pelo ponto médio da classe modal de uma distribuição, ou por processos mais elaborados - gráfico e fórmula - de Czuber e de King e, ainda, pela relação empírica de Pearson. Esta faz uso das medidas de tendência central: média, mediana e moda, aplicadas no cálculo da assimetria e da curtose. Cada uma das medidas de tendência central fornece uma visão parcial dos dados, por isso o pesquisador precisa verificar se o parâmetro moda é adequado ao objetivo de seu estudo investigativo. A moda caracteriza-se por sua aplicabilidade a todos os níveis de medida, especialmente aos dados categóricos. É um processo de aprendizagem muito rico ao envolver conceitos prévios e habilidades que se harmonizam num conjunto de relações constitutivas da moda estatística.

Palavras-chave: Moda Estatística. Tendência Central. Aprendizagem.

Introdução

Em estatística denominam-se medidas de tendência central: a média, a mediana e a moda. Essas medidas dependem da definição de centro de um conjunto de valores ou de uma distribuição que pode ser interpretada de várias maneiras (BERQUÓ et al, 1981). Podem indicar o salário esperado que um trabalhador declara ao ser entrevistado, o salário mais freqüente na empresa ou, ainda, o valor salarial central abaixo do qual/acima do qual está situada a metade de todos os salários pagos pela empresa.

A moda, objeto deste artigo, "é o valor que ocorre com maior freqüência num conjunto de dados, isto é, o valor mais comum" (SPIEGEL, 1976, p. 74). A palavra "moda" significa, no cotidiano, ser "muito usado" e segundo Clegg (1995) expressa com propriedade o significado da moda estatística. Esta é o valor que se repete o maior número de vezes, num conjunto de valores, isto é, o mais freqüente.

---

[1] *Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da UNISINOS - ancila@italnet.com.br*

São muito comuns expressões que mencionam a preferência por determinado produto, maior audiência entre emissoras, obras mais vendidas, candidato mais votado, numeração de calçados de maior procura e outras que passam a ideia de um valor mais freqüente, estatisticamente denominado moda.

Convém assinalar que a expressão “a maioria” num conjunto de dados, nem sempre representa a moda estatística (HUOT, 2009).

As obras de Estatística são unânimes em referenciar o parâmetro moda no cálculo das medidas de assimetria e curtose, mas poucas oferecem seu tratamento estatístico.

A referência mais remota que se tem do uso da moda, citada por Wallis e Robert em sua obra Curso de Estatística, é o que se refere ao cerco dos plateus pelos peloponésios em 428 a.C. No inverno desse ano os plateus, juntamente com os atenienses, estavam sitiados pelos peloponésios e pelos beócios. Armaram um plano para escaparem forçando a passagem pelas muralhas inimigas. Para construir escadas que alcançassem a altura da muralha inimiga muitas pessoas contaram e recontaram, ao mesmo tempo, as camadas de tijolos. Ainda que alguém errasse a contagem, a maioria haveria de ter acertado. Foi dessa forma que obtiveram o comprimento necessário para as escadas alcançarem o objetivo.

O termo moda foi utilizado pela primeira vez por Karl Pearson, em 1895, influenciado pela maneira de falar das pessoas ao afirmarem que tal objeto está na moda, com o significado de coisa mais freqüente (GONÇALVES, 1978). Essa definição permite observar que um conjunto de valores pode possuir mais de uma moda.

Diz-se que um conjunto é unimodal, bimodal, trimodal ou plurimodal, de acordo com o número de modas que apresenta. A ausência de uma moda caracteriza o conjunto como amodal. Encontra-se na estrutura das palavras, o conhecimento prévio para a construção conceitual da classificação dos conjuntos de valores em função da presença ou ausência da moda.

Desvendando os processos de determinação da moda

Sendo a moda de um conjunto de dados o valor que mais se repete (BISQUERA et al., 2004) parece simples a sua identificação. Segundo Stevenson (1982, p. 23): "A moda funciona como medida descritiva quando se trata de contar dados". No caso de uma distribuição de freqüência a classe modal será a que apresenta maior freqüência (20 ├ 25), no exemplo citado, pois contém o valor da moda na distribuição. O ponto médio representativo da classe modal é denominado moda bruta que no exemplo dado é 22,5 peças diárias. Numa distribuição de freqüência a classe modal nem sempre corresponde à classe que contém a mediana.

Karl Pearson observou a existência de uma relação empírica que permite calcular a moda quando são conhecidas a média ($\bar{x}$) e a mediana (Me) de uma distribuição moderadamente assimétrica. Essas condições satisfazem a relação empírica Mo = 3 Me - 2$\bar{x}$ que, no exemplo apresentado, corresponde a Mo = 3(23,08) - 2(23), então Mo = 23,24 peças. Esse processo supõe o domínio conceitual simetria/assimetria, empírica, o cálculo da média aritmética e da mediana. Em uma distribuição simétrica as três medidas - $\bar{x}$, Me, Mo - são exatamente iguais.

Convém lembrar que a fórmula de Pearson pode ser empregada com bons resultados quando os valores da média e da mediana forem conhecidos e a distribuição não for muito simétrica.

Considere-se a distribuição das vendas diárias do setor de peças de uma determinada loja para explicitar os processos de cálculo da moda indicados.

Nº de peças (X)	Nº de dias (fi)	Xi	fac	XiFi
5 ⊢ 10	3	7,5	3	22,5
10 ⊢ 15	9	12,5	12	112,5
15 ⊢ 20	12	17,5	24	210,0
20 ⊢ 25	26	22,5	50	585,0
25 ⊢ 30	15	27,5	65	412,5
30 ⊢ 35	13	32,5	78	422,5
35 ⊢ 40	2	37,5	80	75,0
Total	80	-	-	1.840,0

Tabela 1: Distribuição de vendas diárias

Moda bruta = 22,5 peças

$\overline{X} = \dfrac{\Sigma Xifi}{\Sigma fi}$ $\qquad$ $\overline{X} = \dfrac{1840}{80}$ $\qquad$ $\overline{X} = 23$ peças

Média = $\bar{x}$

$\Sigma Xifi$ = somatório dos produtos freqüência por ponto médio classe a classe

Σfi = somatório da fi. (total)

onde $Po = \frac{\Sigma fi}{2}$ $Po = 40$

Me = 20 + 3,076Me ≅ 23,08

Para a mediana:

Me = mediana

li = limite inferior da classe de localização da Me

Po = localização da classe da Me

fai = freqüência acumulada classe inferior à da Me

fi= freqüência simples da classe da Me

h = intervalo de classe

Moda = 3(Me) – 2($\bar{x}$)

Moda = 3(23,08) – 2(23)

Moda ≅ 23,24 peças

Desejando-se obter a moda com mais exatidão, empregam-se os processos de Czuber e King, os quais apresentam possibilidade de determinação gráfica e um raciocínio matemático em suas formulações. Czuber desenvolve uma forma mais aproximada para o cálculo da moda partindo de um processo gráfico.

Para determinar graficamente a moda Czuber parte do histograma (Figura 1), utilizando os três retângulos correspondentes à classe modal e às classes adjacentes. A moda será o valor do limite inferior da classe modal acrescida de um valor "X" determinado pela intersecção dos segmentos $\overline{AB}$ (que une o limite superior da classe que antecede a classe modal ao limite superior da classe modal) e $\overline{CD}$ (que une o limite inferior da classe modal ao inferior da classe posterior à modal). Portanto: Mo = li + X.

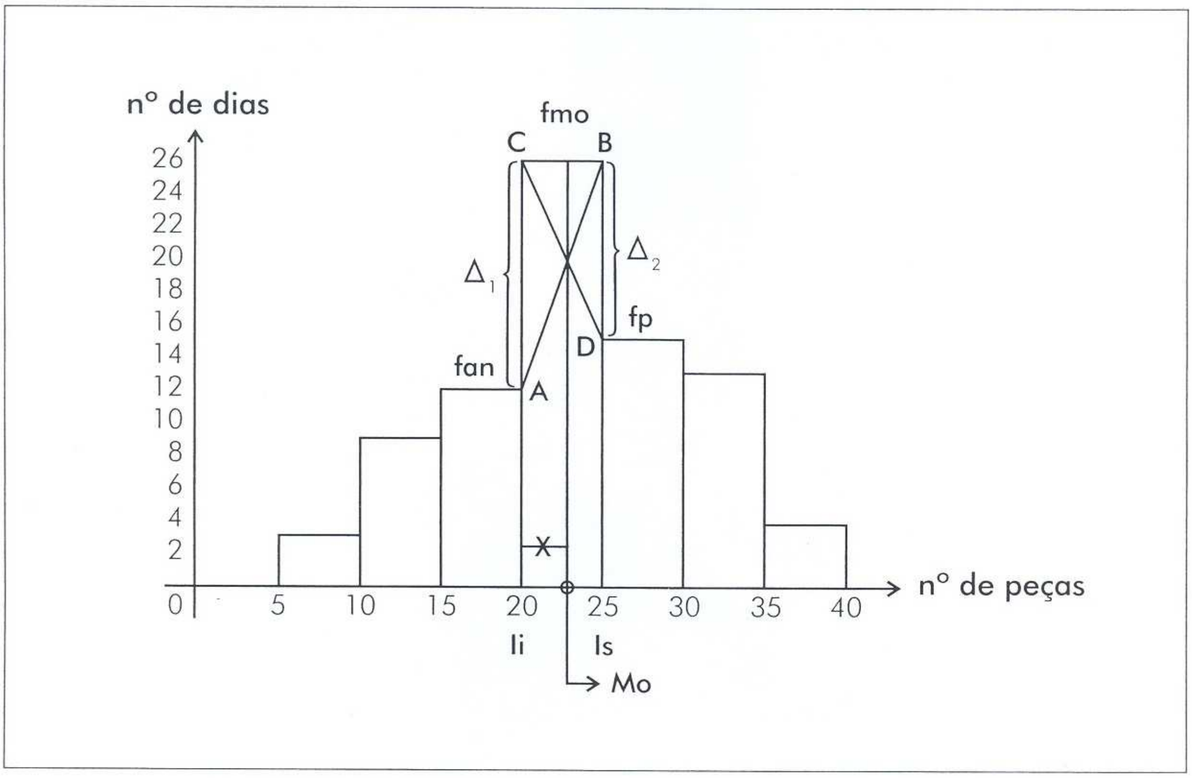

Figura 1: Processo gráfico de Czuber para determinação da moda.

A observação da figura do histograma mostra o uso dos conceitos prévios de semelhança entre os triângulos, de proporcionalidade e a hipótese de Czuber: "A moda divide o intervalo da classe modal em distâncias proporcionais às diferenças entre a freqüência da classe modal com a freqüência das classes adjacentes".

$$\frac{X}{h - X} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

então:

$\Delta_2 . X = \Delta_1 (h - X)$

$\Delta_2 . X = \Delta_1 h - \Delta_1 X$

$\Delta_1 X + \Delta_2 X = \Delta_1 h$

$X(\Delta_1 + \Delta_2) = \Delta_1 h$

$$X = \frac{\Delta_1 h}{\Delta_1 + \Delta_2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} . h$$

Fazendo-se:

fmo = freqüência modal

fan = freqüência anterior à modal

fp = freqüência posterior à modal

h -= intervalo de classe

li = limite inferior da classe modal

Mo = moda

e sabendo que: $\begin{cases} \Delta_1 = fmo - fan \\ \Delta_2 = fmo - fp \end{cases}$ substitui-se pelas equivalências então

e como Mo = li + x, substituindo-se X pelo seu valor, tem-se a fórmula de Czuber:

$$Mo = li + \frac{fmo - fan}{2fmo - (fan + fp)} \cdot h$$

O processo gráfico de Czuber embasa o processo matemático, e sua construção formal requer o conhecimento de conceitos prévios de geometria, proporcionalidade e fatoração.

No exemplo da distribuição da freqüência das peças vendidas, a moda de Czuber indica:

Mo = 20 + 2,8 Mo = 22,8 peças

O estudante familiarizado com o cálculo pode encontrar a fórmula de Czuber através da parábola construída de modo a passar pelos pontos médios da classe modal e das classes adjacentes a ela.

O processo de W. I. King apresenta sua forma geométrica de determinação através do histograma conforme a Figura 2.

Percebe-se que a Mo = li + X.

Traçando, na figura, em continuidade ao segmento do limite superior da classe modal, a projeção do limite inferior da classe modal, tem-se $\overline{AB}$ que faz intersecção com o eixo da abscissa – escala numerada - onde se lê a moda das peças vendidas.

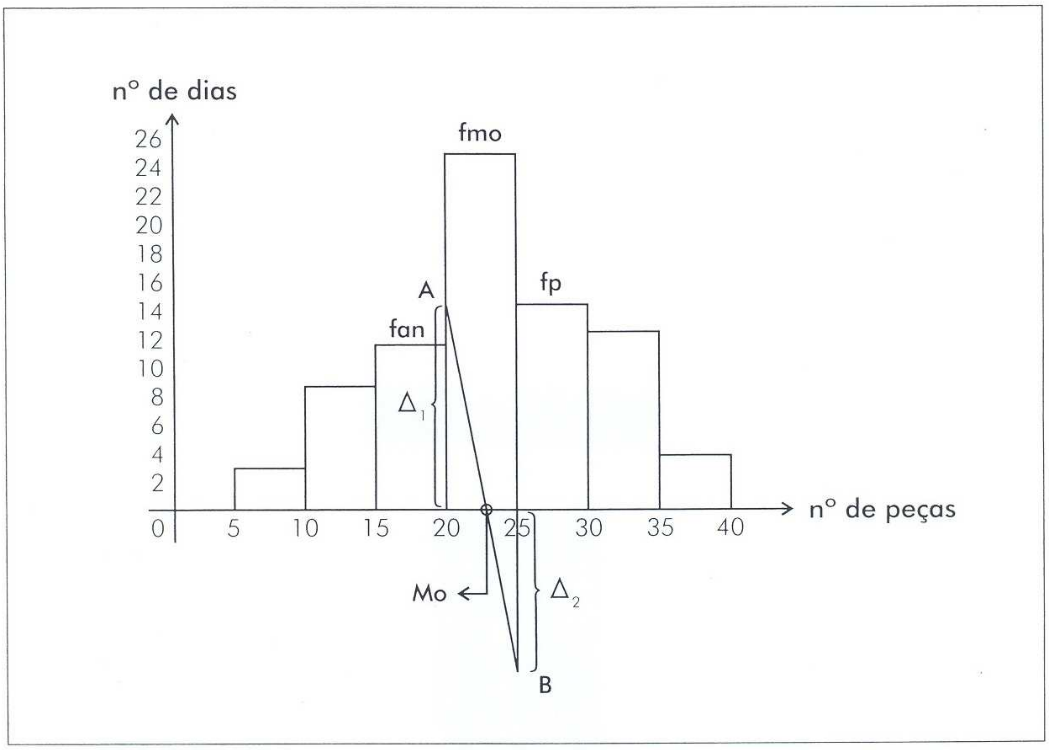

Figura 2. Processo gráfico de King para determinação da moda.

A proposta de King pouco difere da de Czuber baseada nos conceitos de semelhança entre os triângulos e proporcionalidade. Retoma-se a ideia de a moda ser equivalente ao valor do limite inferior da classe modal acrescido de um valor "X" correspondente ao segmento entre o limite inferior da classe modal e o ponto de intersecção com o eixo da abscissa.

O processo de cálculo baseia-sena proporcionalidade pela semelhança dos triângulos de acordo com a figura acima e na hipótese de King: "A moda divide o intervalo da classe modal em distâncias inversamente proporcionais às freqüências das classes adjacentes".

$$\frac{X}{h - X} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

sendo que: $\begin{cases} \Delta_1 = fp \\ \Delta_2 = fan \end{cases}$

fp = freqüência da classe posterior à modal

fan = freqüência da classe anterior à modal

$X.\Delta_2 = \Delta_1(h - X)$

$X\Delta_2 = \Delta_1 h - \Delta_1 X$

$\Delta_1 X + \Delta_2 X = \Delta_1 h$

$X(\Delta_1 + \Delta_2) = \Delta_1 h$

então:

e substituindo-se "X" na relação inicial Mo = li + X, temos que:

Para a dedução desta fórmula para dados agrupados em classes de freqüência o autor utilizou os mesmos conceitos prévios do processo de Czuber. A moda de King para o exemplo das peças vendidas indica:

$Mo \cong 20 + 2{,}77$

$Mo \cong 22{,}77$ peças

As propostas de Czuber e King para a moda elaborada apresentam certa similaridade em seu raciocínio e diferem no que se refere às freqüências. King baseia-se na influência das freqüências adjacentes sobre a classe modal, e Czuber leva em consideração não apenas as freqüências das classes adjacentes, mas também da freqüência da classe modal, segundo Madsen Barbosa (p.99). Observa-se que os valores extremos não afetam o cálculo da mesma.

Foi possível verificar nos exemplos dados que o cálculo da moda não apresentou os mesmos resultados, o que geralmente ocorre em virtude do processo adotado.

A moda estatística: relações conceituais

Os processos elaborados para determinação da moda estatística incluem as respectivas fórmulas, comumente decoradas para efeito de aplicação. A compreensão do processo do qual se origina a fórmula em sua culminância é um conceito que pode ser aprendido melhor e significado pelo aprendente. Evitar-se-ia, “o fenômeno escolar tão comum da cristalização do saber na memória, do saber decorado, ... superado pelos processos propriamente interdisciplinares (ETGES, 1995, p. 79).

Esta visão remete ao conceito de moda, onde, a presença de conceitos de áreas específicas se harmonizam de forma coerente e singular para a compreensão adequada do parâmetro estatístico que o termo denomina.

Um episódio interessante da História revela suas origens numa aplicação inusitada. As áreas da confecção e de calçados usam o termo “moda” associado às tendências sazonais. Outro conceito, o de centro pode ser inferido de várias formas, inclusive na idéia geométrica de centro, que pode ou não ter presença una ou múltipla.

A Língua Portuguesa contribui para decodificar a classificação modal de um conjunto de valores ou de uma distribuição de freqüência: da presença de uma única moda – unimodal, duas modas – bimodal, trimodal – três modas, multimodal ou plurimodal – muitas modas, até a ausência de uma moda quando se atribui a designação amodal.

A idéia de “moda” se faz presente no cotidiano, sendo estudada no Ensino Médio e em cursos cuja disciplina consta do currículo em consonância com suas finalidades. Geralmente, é proposto o estudo da moda pelo processo empírico de Pearson, usando a média matemática e a mediana para a determinação da moda. Estão presentes no processo conceitos oriundos da Matemática – a média – da Estatística – a mediana e de empírico por derivar da experiência.

Ao estudar os processos de Czuber e King para determinar a moda – gráfico e fórmula – contempla-se a construção gráfica e sua interpretação. Na demonstração dos processos busca-se na matemática a ferramenta e o raciocínio argumentativo através da proporcionalidade, da semelhança de triângulos, com aplicações algébricas e a definição das fórmulas dos respectivos autores.

As relações descritas evidenciam a importância do docente formar-se na “estrutura epistemológica de sua(s) disciplina(s) bem como na história e filosofia da ciência... para que seja capaz de ensinar as disciplinas de modo que provoquem a compreensão conceitual das mesmas” (GIMENO E PÉREZ GÓMEZ, 1998, p.355).

Considerações finais

A moda faz parte das medidas de tendência central-média, mediana e moda - utilizadas na análise da assimetria/simetria e curtose. É um parâmetro fácil de calcular e não é afetada pelos valores extremos, mas seu valor é fortemente afetado pela maneira como as classes são constituídas. Segundo Bunchaft e Kellner (1997, p.119): "A moda tem como característica importante a sua aplicabilidade a todos os níveis de medida - nominal, ordinal e intervalar - sendo seu emprego desejável em se tratando de dados em categorias, ou seja, distribuições de variáveis qualitativas".

A utilização da moda estatística no ramo de confecções e calçadista indica os tamanhos mais usuais e na empresa o salário predominante, entre outras aplicações. Na escola, pode assinalar a predominância da evasão escolar ou outros fenômenos que mereçam ser pesquisados.

Ao pesquisador cabe a tarefa de identificar em que situação deve usar a moda como medida descritiva ou na pesquisa de natureza qualitativa. Sugere-se ao professor no ensino explorar as ricas possibilidades conceituais prévias e em construção na aprendizagem da moda, em suas relações constitutivas.

Referências

BERQUÓ, Elza Salvarori et al. **Bioestadística**. São Paulo: EPU, 1981.

BISQUERA, Rafael et al. **Introdução à estatística**: enfoque informático com o pacote estatístico SPSS. Porto Alegre: Artmed, 2004.

BUNCHAFT, Guenia; KELLNER, Sheilah R. Oliveira. **Estatística sem mistérios**. V. I. 2.ed. Petrópolis: Vozes, 1997.

CLEGG, Frances. **Estatística para todos**. Lisboa: Gradiva, 1995.

ETGES, Norberto J. **Ciência, interdisciplinaridade e educação**. In: Jantsch, Ari P.; Bianchetti, Lucídio (orgs). Interdisciplinaridade: para além da filosofia do sujeito. Rio de Janeiro: Vozes, 1995.

GIMENO, Sacristán J.; PÉREZ GÓMEZ, A.I. **Compreender e transformar o ensino**. 4.ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

GONÇALVES, Fernando A. **Estatística descritiva**. 2.ed. São Paulo: Atlas, 1978.

HUOT, Réjean. **Métodos quantitativos para as ciências humanas**. Lisboa: Piaget, 1999.

MADSEN BARBOSA, Ruy. **Estatística elementar**. V. 1. São Paulo: Benetti, s.d.

SPIEGEL, Murray R. **Estatística**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976.

STEVENSON, William. **Estatística aplicada à administração**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1981.

WALLIS, W Allen; ROBERT, Hary V. **Curso de estatística**. V. 1. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, s.d.