

DESCOBRINDO OS POLIEDROS DE PLATÃO

Thatielle Demski Martins¹

Viviane Goldoni²

RESUMO

Neste mini-curso, propomo-nos a apresentar um pouco mais sobre a geometria. Iremos explorar os Poliedros de Platão, sua história e suas características, que despertaram paixão em muitos que, por observarem-nas, os estudaram, procurando, de uma forma ou de outra, desvendar os seus mistérios. Este estudo originou-se, durante o curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), quando nos foi solicitada a realização de um Projeto de Pesquisa. Obtendo sucesso na realização deste Projeto, decidimos aprimorá-lo para a elaboração de um artigo que nos foi solicitado em outra disciplina da graduação. Neste mini-curso, abordaremos tais estudos, juntamente com a observação e a exploração dos cinco poliedros platônicos. Além de analisar com os participantes as características dos cinco poliedros, propomo-nos a relatar as experiências que concretizamos nas quais desvendamos com nossos alunos, o mistério da existência de apenas cinco poliedros regulares. O mini-curso terá início com uma apresentação em Power Point, que conterà ideias sobre alguns tópicos significativos da Geometria. Em seguida, será entregue aos participantes diferentes polígonos regulares, com os quais eles deverão realizar a construção de ângulos poliédricos com diferentes números de polígonos regulares (triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos e octógonos). Para cada tentativa de formar um ângulo poliédrico, o participante anotará em sua tabela, que foi recebida juntamente com os polígonos regulares, se foi possível ou não essa construção, sendo que poderá utilizar apenas um tipo de polígono por vez. Assim, no final dessa atividade, ele poderá perceber com quais polígonos regulares foi possível a formação de ângulos poliédricos, o que auxiliará em suas conclusões finais. Os participantes poderão

¹ Professora licenciada em Matemática pela PUCRS. E-mail: thatiellemartins@gmail.com

² Professora licenciada em Matemática pela PUCRS. E-mail: vivi.goldoni@gmail.com

perceber que somente é possível formar ângulos poliédricos com três triângulos, com quatro triângulos, com cinco triângulos, com três quadrados e com três pentágonos. Concluindo que com maior número de polígonos em formato de triângulos, quadrados e pentágonos, e até mesmo com outros tipos de polígonos regulares não é possível formar ângulos poliédricos, já que a soma dos ângulos dos polígonos será superior a 360° , e que, para formar um ângulo poliédrico, é necessário, no mínimo, três polígonos. Em outro momento durante o mini-curso, serão apresentados os cinco poliedros de Platão e será entregue aos participantes outra tabela, que deverá ser preenchida a partir da contagem do número de faces, arestas e vértices de cada Poliedro de Platão, trabalhando, intuitivamente, a Relação de Euler e, a partir da análise da tabela, definindo-a. Temos como objetivo, ao realizar esta atividade, resgatar um pouco do conhecimento geométrico de cada um. Por esse motivo, através da realização das atividades esperamos que todos possam identificar os poliedros regulares, reconhecer a existência de apenas cinco, conhecer a origem dos poliedros, identificar os platônicos e relacionar os poliedros com os elementos primordiais: a terra, a água, o fogo, o ar e o universo.

Palavras-chave: Geometria. Ângulos Poliédricos. Poliedros de Platão.

INTRODUÇÃO

Através deste mini-curso, propomos a apresentar um pouco mais sobre a geometria, uma parte da matemática que é rica em beleza. Em meio a esta beleza, iremos explorar os Poliedros de Platão, sua história e suas características, que despertaram paixão em muitos que, por observarem esta beleza, os estudaram, procurando de uma forma ou de outra, desvendar os seus mistérios.

Durante o curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), em várias disciplinas e como bolsista de iniciação científica, realizamos oficinas com diferentes conteúdos de matemática básica. Quando nos foi solicitado a realização de um Projeto de Pesquisa na disciplina de Projetos, optamos por aprofundar estudos que já havíamos feito e realizar outras oficinas sobre geometria, em especial sobre os ângulos poliédricos e sobre os Poliedros de Platão. Obtendo sucesso na realização deste Projeto, decidimos aprimorá-lo para a descrição de um artigo solicitado em outra disciplina da Graduação.

Neste mini-curso, traremos estes estudos, juntamente com a observação e a exploração dos cinco poliedros platônicos. Vamos analisar suas características e relatar as experiências

que concretizamos nas oficinas, em que, junto com os participantes, desvendamos o mistério da existência de apenas cinco poliedros regulares.

Temos como objetivo, ao realizar este mini-curso, resgatar um pouco do conhecimento geométrico de cada um e, através da realização das atividades, esperamos que todos possam identificar os poliedros regulares, reconhecer a existência de apenas cinco, conhecer a origem dos poliedros, identificar os poliedros platônicos e, como fez Platão, relacioná-los com os elementos primordiais: a água, o fogo, a terra, o ar e o Universo.

GEOMETRIA: ORIGEM E IMPORTÂNCIA

A geometria é de extrema importância para a vida do homem. Como tudo em matemática, ela nasceu de uma necessidade que o homem. O próprio nome nos dá uma ideia disso, já que a geometria é composta de duas palavras gregas: geos (terra) e metron (medida). Esta denominação deve a sua origem à necessidade que, desde os tempos remotos, o Homem teve de medir terrenos. Conta a história que, ano após ano, o rio Nilo transbordava do seu leito natural, espalhando um limo sobre os campos ribeirinhos, que na época se circunscruvia a uma estreita faixa de terra às margens do rio. A inundação fazia desaparecer os marcos de delimitação entre os campos. Para demarcarem novamente os limites, existiam os "puxadores de corda", os "harpedonaptas" que faziam a remarcação. Para isso, eles baseavam-se intuitivamente no conhecimento de que o triângulo de lados 3, 4, 5 é retângulo.

No entanto, o testemunho de conhecimento mais antigo da Geometria são as construções das pirâmides e templos pelas civilizações egípcia e Babilônica. Contudo, muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, desde a Babilônia à China, passando pela civilização Hindu. Os Babilônicos tinham conhecimentos matemáticos que provinham da agrimensura e comércio e a civilização Hindu conhecia o teorema sobre o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo.

A Geometria como ciência dedutiva apenas teve início na Grécia Antiga, cerca de sete séculos antes de Cristo, graças aos esforços de muitos notáveis antecessores de Euclides, como Tales de Mileto (640 - 546 a.C.), Pitágoras (580 - 500 a.C.) e Eudoxio (408 - 355 a.C.).

Outro importante matemático foi Platão. Ele interessou-se muito pela Geometria e, ao longo do seu ensino, evidenciou a necessidade de demonstrações rigorosas, o que facilitou o trabalho de Euclides. Euclides (323 - 285 a.C.) contribuiu muito para o desenvolvimento da Geometria escrevendo o livro "Elementos" que é constituído por 13 volumes. Este livro estabeleceu um método de demonstração rigorosa só muito recentemente superado.

No entanto, a geometria tão importante para a compreensão de outros ramos da matemática e de outras ciências, sendo pouco explorada com os alunos de ensino fundamental e médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propõem para o ensino da geometria, que o aluno desenvolva a compreensão do mundo em que vive, aprendendo a descrevê-lo, representá-lo e a localizar-se nele, permitindo o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Muitas vezes, encontramos o tema Geometria apenas no final dos livros didáticos, sem a exploração dos conteúdos. A falta de preparo do professor em geometria também é um dos motivos por esta área ser muito pouco estudada em salas de aula.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008, p. 75) afirmam que:

O estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano [...]. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Via de regra, não é este o destaque que a geometria recebe na educação básica. Nas poucas vezes em que um aluno se depara com ela, pode não compreendê-la, tornando-se seu grande inimigo. Assim, o que seria um tema interessante e motivador a ser explorado, limita-se e conteúdos memorizados que o aluno reproduz na avaliação, a fim de alcançar “um bom rendimento”.

UM POUCO SOBRE PLATÃO

Platão nasceu em Atenas, provavelmente em 427 a.C. e morreu em 347 a.C. Por volta dos 20 anos, encontrou o filósofo Sócrates e tornou-se seu discípulo. Quando o filósofo Sócrates foi condenado à morte, em 399 a.C., pelo governo de Atenas (sob a acusação de "perverter a juventude" com seus ensinamentos filosóficos), Platão preferiu deixar a cidade. Passou, então, alguns anos percorrendo outras partes do mundo grego, desde o norte da África até a Itália e, nessas andanças, tomou contato com os ensinamentos pitagóricos. Em 388 a.C., quando já estava com quase quarenta anos, Platão viajou para a Magna Grécia com o intuito de conhecer mais de perto comunidades pitagóricas. Nesta ocasião, veio a conhecer Arquitas de Tarento. Ainda durante essa viagem, Dionísio I convidou Platão para ir à Siracusa, na

Sicília. Platão partiu para Siracusa com a esperança de lá implantar seus ideais políticos. No entanto, acabou desentendendo-se com o tirano local e retornou para Atenas.

Em seu retorno, passou a dedicar-se inteiramente à filosofia, fundando uma escola chamada "Academia". A instituição logo adquiriu prestígio e a ela acorriam inúmeros jovens em busca de instrução e até mesmo homens ilustres a fim de debater ideias. Platão permaneceu na direção da Academia até sua morte. A Academia manteve-se em funcionamento após sua morte. Ela só foi fechada oito séculos depois, por ordem do imperador Justiniano. A filosofia platônica, porém, continuou a ter influência sobre o pensamento da igreja até o século XIII, quando os conceitos de Aristóteles (384 a.C. - c. 322 a.C.) passaram a ser mais dominantes.

OS SÓLIDOS REGULARES

Grandes filósofos e matemáticos dedicaram à vida ao estudo da geometria. Enquanto a escola pitagórica tinha como lema "Tudo são números", a escola de Platão (a Academia) tinha escrito sobre a porta, "Não entre aqui ninguém que não seja geômetra". Há evidências de que os Povos Neolíticos que viveram na Escócia tenham esculpido alguns destes sólidos 1000 anos antes. Alguns destes modelos, conforme apresentamos na figura1 - Modelos Neolíticos dos Sólidos Platônicos, encontram-se no Museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido.

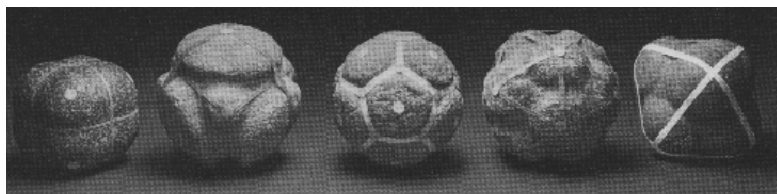


FIGURA 1: Modelos Neolíticos dos Sólidos Platônicos³

Os poliedros regulares fazem parte do estudo da geometria desde que esse estudo se iniciou. Eles têm uma beleza simétrica que fascinou homens em todos os tempos. Alguns poliedros regulares eram conhecidos dos antigos egípcios, que os usavam em sua arquitetura.

No Livro XIII dos *Elementos* de Euclides há um início de tratamento matemático desses sólidos, conhecidos como sólidos de Platão, assim chamados erradamente, pois segundo Eves (p.114, 2004) “[...] três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto”.

³ www.math.ist.utl.pt/~ppinto/plato5.htm

Platão (350 a.C.) foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o **cubo**, o **tetraedro**, o **octaedro**, o **dodecaedro** e o **icosaedro**. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como “poliedros de Platão”.

O conhecimento destes sólidos parece ter sido desencadeado num encontro com Arquitas que, em viagem à Cecília, no sul de Itália, encontraria Platão. Para este, o Universo era formado por um corpo e uma alma, ou inteligência. Na matéria havia porções limitadas por triângulos ou quadrados, formando-se elementos que diferiam entre si pela natureza da forma das suas superfícies periféricas. Em seu *Timeu*⁴, Platão misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir – tetraedro, octaedro, icosaedro e o hexaedro – com os quatro “elementos” primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais – fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca, conforme figura 2 - sólidos associados aos elementos primordiais.



FIGURA 2: Sólidos associados aos elementos primordiais.⁵

Um estudo mais detalhado encontramos em Eves (2004, p. 114):

Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações do *Timeu*. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para a sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume – superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tenha maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a estabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções.

⁴ **Timeu** é um tratado teórico de Platão na forma de um diálogo socrático, escrito cerca 360 a.C.. A obra apresenta especulações sobre a natureza do mundo físico.

⁵ <http://www.prof2000.pt/users/lujoin/Tarefa7.html>

Embora chamados Platônicos, Proclus atribuiu a construção destes poliedros a Pitágoras, supondo-se que é também a ele que se deve o teorema: **Há somente cinco poliedros regulares.**

Hoje sabe-se que o teorema só é verdadeiro para os poliedros regulares convexos. Alguns séculos mais tarde, em 1597, Kepler (1571-1630) inspirou-se nos poliedros regulares para estudar o movimento dos seis planetas até então conhecidos (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio) e publicou a sua obra "The Cosmographic Mystery", onde utilizou um modelo do sistema solar composto por esferas concêntricas, separadas umas das outras por um cubo, um tetraedro, um dodecaedro, um octaedro e um icosaedro para explicar as distâncias relativas dos planetas ao sol.

Foi também Kepler, quem descobriu o primeiro poliedro regular côncavo, que é o dodecaedro estrelado, de faces regulares que resulta do prolongamento das faces do dodecaedro. Kepler no início do séc. XVII, sugeriu associar os Sólidos Platônicos aos planetas conhecidos nessa altura: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

Temos conhecimento dos poliedros regulares presentes na natureza: os três primeiros sob a forma de cristais e os outros dois como esqueletos de animais marinhos microscópicos. Sua beleza e simetria instigaram o interesse do ser humano por eles através dos séculos. Não há nenhuma disciplina matemática específica baseada nos cinco sólidos, mas muita coisa importante da matemática foi descoberta como subproduto do estudo dessas figuras.

Depois dos gregos, o interesse pelo assunto diminuiu, e os sólidos nunca mais alcançaram o mesmo interesse e a mesma importância daquele período. As considerações atuais sobre os cinco sólidos tendem a ser topológicas, como se pode observar numa definição moderna, ou seja, de que um sólido é um poliedro convexo regular se todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si, se seus vértices são convexos e se em cada vértice incide o mesmo número de faces.

VERIFICANDO QUE SÓ EXISTEM CINCO POLIEDROS PLATÔNICOS

Os poliedros conhecidos como poliedros de Platão não são apenas os poliedros regulares, mas sim todos aqueles que:

- são convexos;
- têm o mesmo número de lados em todas as faces;
- em todos os vértices chega o mesmo número de arestas.

Assim surge a pergunta: Será que existem apenas cinco poliedros de Platão?

Para ajudar a responder esta pergunta, encontramos no Livro XI de *Os Elementos* de Euclides, a proposição 21. Esta diz que “a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360° ”. Apesar de intuitiva, a demonstração apresentada por Euclides é elaborada, sendo decorrente de uma seqüência de resultados auxiliares.

Nas tabelas a seguir, apresentaremos uma análise com as diversas possibilidades de união de faces em torno de cada vértice, lembrando que em um sólido platônico as faces são polígonos regulares congruentes e que são necessárias pelo menos três faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

1. As faces são triângulos equiláteros com ângulos internos de 60° . Temos as seguintes possibilidades:

Número de triângulos	Soma dos ângulos	Poliedro formado
3	180°	Tetraedro
4	240°	Octaedro
5	300°	Icosaedro
6	360°	Não existe

Conclusão: Com seis ou mais triângulos equiláteros é impossível formar um ângulo poliédrico.⁶

2. As faces são quadrados com ângulos internos de 90° . Temos as seguintes possibilidades:

Número de quadrados	Soma dos ângulos	Poliedro formado
3	270°	Hexaedro
4	360°	Não existe

Conclusão: Com quatro ou mais quadrados é impossível formar um ângulo poliédrico.

⁶ **Ângulo poliédrico** é cada bico de um poliedro formado por faces iguais.









3. As faces são pentágonos regulares com ângulos internos de 108° . Temos as seguintes possibilidades:

Número de pentágonos	Soma dos ângulos	Poliedro formado
3	324°	Dodecaedro
4	432°	Não existe

Conclusão: Com quatro ou mais pentágonos regulares é impossível formar um ângulo poliédrico.

4. Se as faces são polígonos regulares com mais de 6 lados, então a soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice é maior que 360° . Sendo assim, não existe nenhum sólido platônico com faces hexagonais, heptagonais, etc.

Assim, temos apenas cinco poliedros que são regulares, podendo então dizer que todo poliedro regular é um poliedro de Platão. Porém nem todo poliedro de Platão é regular, ou seja, só existem cinco tipos de poliedros de Platão, regulares ou não, que são:

REGULARES	NÃO REGULARES
	
	
	
	
	

ATIVIDADES DO MINI-CURSO

O mini-curso será dividido em alguns momentos:

1º MOMENTO: Introduziremos o assunto do mini-curso através de uma apresentação em Power Point contendo ideias sobre alguns tópicos significativos da Geometria.

2º MOMENTO: Entregaremos polígonos regulares aos participantes, divididos em grupos, que serão utilizados para montar ângulos poliédricos, isto é, os bicos que formam os poliedros. Juntamente entregaremos uma tabela que será utilizada no decorrer da atividade.

3º MOMENTO: Explicaremos a atividade que será desenvolvida com o material entregue anteriormente. Os participantes deverão montar ângulos poliédricos com diferentes números de polígonos regulares iguais (triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos e octógonos), registrando em sua tabela os resultados obtidos, e expressando conclusões a respeito das possibilidades de polígonos regulares justapostos formarem ângulos menores do que 360° .

4º MOMENTO: Retomaremos a apresentação em Power Point, discutindo e analisando com os participantes suas conclusões e, através de desenhos planejados, verificar com quais polígonos é possível formar bicos, e quantos são formados através de cada um deles.

5º MOMENTO: Entregaremos aos participantes outra tabela, que deverá ser preenchida a partir da contagem do número de faces, arestas e vértices de cada Poliedro de Platão, trabalhando, intuitivamente, a Relação de Euler, definindo-a.

6º MOMENTO: Finalizaremos a atividade do mini-curso, falando brevemente sobre a biografia de Platão, e algumas curiosidades sobre os poliedros, como, por exemplo, lugares onde poderemos encontrá-los.

COMENTÁRIOS FINAIS

Durante a pesquisa ao realizar os propostos trabalhos, percebemos que este projeto, com suas oficinas, poderia ser aplicado tanto com alunos de determinados níveis de ensino, quanto com grupos heterogêneos. Para isso basta adaptá-lo aos conhecimentos prévios que os participantes possuem, resgatando conteúdos que envolvam tanto a geometria plana como a geometria espacial.

Partindo dos conhecimentos que os alunos possuem, é possível aprofundá-los e aprimorar a atividade, partindo para outros estudos mais detalhados, conectando-os ao objetivo do mediador.

Aplicando essa atividade, acreditamos que, ao trabalhar com material concreto, os alunos compreendam melhor a geometria e percebam que a matemática vai além dos números.

REFERÊNCIAS

BRASIL. ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação Básica, Brasília: MEC/SEB, 2008.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

TIMEU. Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Timeu>>. Acesso em: 30 out. 2008.