BHASKARA: ALGUMAS EVIDÊNCIAS

Kamila Gonçalves Celestino[1]

Edilson Roberto Pacheco[2]

Resumo

A pesquisa em história da matemática tem se configurado como tema de interesse crescente comprovado pelas diversas fontes e publicações já acessíveis, relacionadas ou não ao ensino da matemática. São diversas as possibilidades de abrangência que a investigação em história da matemática propicia, como por exemplo, o estudo de conceitos, fórmulas, métodos e biografias. Neste trabalho podem ser identificadas essas temáticas, haja vista a vinculação entre os temas. Conteúdo presente já no ensino fundamental, o estudo da equação do segundo grau resulta, tradicionalmente, à conhecida fórmula $x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para resolução de equações na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$. Em muitos casos, ainda é notória a vinculação dessa fórmula ao nome de um importante matemático hindu do século XII - Bhaskara. A origem exata dessa associação é difícil de estabelecer, entretanto, sabe-se que remonta há algumas décadas e que essa relação é circunscrita exclusivamente ao ensino de matemática no Brasil. Segundo historiadores da matemática, Bhaskara, em duas das suas obras, apresenta e resolve diversos problemas do segundo grau. Na busca de informações históricas sobre a equação do segundo grau constatou-se que em episódios da história antiga da matemática alguns povos, dentre eles, babilônios, egípcios e gregos, deixaram registros em que são identificados procedimentos para resolução de alguns problemas que envolvem equações de segundo grau. A partir do início do século IX, matemáticos árabes já haviam se empenhado na resolução de equações do segundo grau, cujos procedimentos utilizaram álgebra e geometria dos gregos, e, em decorrência, fórmulas específicas para tipos diferentes de equação surgiram. Contudo, o aparecimento de uma fórmula geral para se obter as raízes de

---

[1] Aluna do 4º ano de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO/Guarapuava, PR. Bolsista PROIC - PAIC/Fundação Araucária. kamilagc666@yahoo.com.br.

[2] Professor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO Guarapuava, PR. edilson@unicentro.br.

uma equação do segundo grau está situado por volta do final do século XVI. Diante disso, este trabalho é um estudo de natureza bibliográfica, a partir de fontes de referência na história da matemática, o qual procurou evidenciar a figura de Bhaskara e sua efetiva relação com a equação do segundo grau. Verificou-se que os interesses desse matemático se deram em diferentes temas e ainda, que há mais de um nome Bhaskara na história da matemática. Por assim ser, houve necessidade de situar cada um deles a fim de evidenciar suas presenças na história da matemática e, principalmente, possíveis vinculações a estudos relativos à equação do segundo grau. Constatou-se que apenas um dos nomes Bhaskara tem algo a ver com a história da equação do segundo grau, entretanto, sua contribuição não se deu na direção da autoria de uma fórmula geral.

Palavras-chave: história da matemática, equação do segundo grau, Bhaskara.

Introdução

Dentre as modalidades de estudos que se identificam como pesquisas em História da Matemática estão os que tratam da investigação relativa à história de problemas, conceitos, métodos e também a figuras humanas (BARONI e NOBRE, 1999). A busca pela composição de informações correlatas a um determinado tópico considerado de importância histórica é um tema cada vez mais presente nessa área.

No presente estudo, o tema “equação do segundo grau” foi adotado como relevante para um estudo de natureza histórica por se tratar de assunto decorrente de um levantamento de opiniões efetuado com professores do ensino fundamental e alunos de graduação sobre qual tema gostariam de maior aprofundamento no aspecto histórico. Em particular, o recorte que esse estudo propiciou foi sobre a figura humana de Bhaskara, haja vista a associação que esse nome tem tido, há algumas décadas, quando se refere à equação do segundo grau, mais especificamente, à fórmula geral. O objetivo, portanto, foi evidenciar, de maneira mais adequada, Bhaskara referentemente à sua presença e contribuição à matemática.

Antes, porém de adentrar na especificidade deste estudo, algumas notas históricas sobre a equação do segundo grau se fizeram necessárias.

A equação do segundo grau

Em referências que tratam da história da equação do segundo grau verifica-se que as raízes de métodos para sua resolução provêm de muito tempo e que, em povos distintos, é possível identificar conhecimentos referentes a esse assunto. Segundo Eves (2002), em textos babilônicos, escritos há cerca de 4000 anos, encontram-se descrições de procedimentos para resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau. O autor menciona também que na Grécia, utilizava-se geometria para resolver equações do segundo grau. É conhecido que construções geométricas são encontradas no método de Euclides.

Uma síntese histórica também é apresentada em Pitombeira (2008, p.55-88) na qual se nota que, entre os egípcios, problemas constantes em papiros, envolvendo geometria, interpretados em linguagem atual configuram equações de 2º grau. O problema 6 do Papiro Golonishev[3] mostra um procedimento para o "cálculo do retângulo":

> Se te é dito, um retângulo de área 12, largura ½ + ¼ do comprimento.
>
> Resolução:
> Calcula ½ + ¼ até obter 1. Resultado 1 + 1/3. Calcula 1 + 1/3 de 12. Resultado 16. Calcula então o seu ângulo [raiz quadrada].
>
> Resultado 4 para o comprimento e 3 para a largura.

Entre os babilônios, os registros cuneiformes em tabletas de argila revelaram procedimentos de resolução de alguns tipos de equações do 2º grau, algumas apresentadas sob a forma de sistemas. Os gregos estruturaram conhecimentos anteriores dos egípcios e babilônios resultando na forma de demonstração matemática, uma linguagem até então não explorada. Exemplo notável é a obra *Elementos* de Euclides da qual demonstrações geométricas serviram como recursos para a resolução de alguns tipos de equações de 2º grau

[3] Um dos papiros que contém esse tipo de problema é o Papiro de Moscou, também conhecido como Papiro Golonishev, em referência ao seu proprietário Vladimir Golenishchev. Tem forma de uma tira de 5,5m de comprimento por 8cm de largura, na qual estão contidos 25 problemas matemáticos grafados na escrita hierática. Foi datado como 1850 a.E.C. e encontra-se atualmente no Museu Pushkin, em Moscou.

na interpretação do cálculo de áreas. Entretanto, "*afirmar que os Elementos resolvem geometricamente equações do 2º grau é uma interpretação contestável*". (PITOMBEIRA, 2008, p.64)

No início do século IX, o califa Al-Ma´mun estabeleceu, em Bagdá, a Bayt al-Hikma (a Casa da Sabedoria), uma espécie de instituto de pesquisa, onde muitos dos principais trabalhos de matemáticos gregos foram traduzidos para o árabe. Assim, estudiosos islâmicos absorveram as antigas tradições matemáticas dos babilônicos e a trigonometria dos hindus.

Para o historiador da matemática Victor Katz, "A maior contribuição da matemática islâmica foi na área de Álgebra. Eles tomaram os trabalhos já desenvolvidos pelos babilônicos, combinaram com a herança clássica grega da geometria e produziram uma nova álgebra." (1998) Dentre esses estudiosos, destaca-se o persa Al-Khwarizmi que se empenhou à resolução de equações do segundo grau utilizando álgebra e a geometria dos gregos. O aprendizado contido nas obras gregas de que somente se poderia considerar resolvido um problema matemático se fosse possível prová-lo, levou alguns estudiosos árabes a fornecer provas utilizando geometria. Para Katz (1998), escritos de Al-Khwarizmi, utilizando apenas palavras e números e não símbolos se constituíram como um manual para resolver equações e como os matemáticos islâmicos, diferentemente dos hindus, não tratavam com números negativos, classificou-as em seis tipos, chegando a fórmulas específicas para os diferentes tipos[4] de equações:

1. Quadrados são iguais a raízes. $(ax^2 = bx)$
2. Quadrados são iguais a números. $(ax^2 = c)$
3. Raízes são iguais a números. $(bx = c)$
4. Quadrados e raízes são iguais a números. $(ax^2 + bx = c)$
5. Quadrados e números são iguais a raízes. $(ax^2 + c = bx)$
6. Raízes e números são iguais a quadrados. $(bx + c = ax^2)$

Thabit ibn Qurra[5], no séc. VIII também utilizou proposições dos *Elementos* para resolver dois tipos de equação de segundo grau. Justificações similares foram dadas pelo matemático egípcio Abu Kamil ibn Aslan (c.850-930).

---

[4] Os tipos listados são os únicos que tem coeficientes e raízes positivos, ou seja, a forma geral $ax^2 + bx + c = 0$ não consta da lista, pois, mesmo os coeficientes sendo positivos, as raízes podem não ser.

[5] Tabit ibn Qurra (836-901), mostrou que as equações $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$, e $x^2 + ax = b$ podem ser resolvidas utilizando as proposições II.5 e II.6 dos *Elementos* de Euclides.

No século XII, um dos mais importantes matemáticos da época, o hindu Bhaskara (1114-1185), em duas das suas obras, apresenta e resolve diversos problemas do segundo grau. E a fórmula geral? Até o final do século XVI não há registros da existência de uma fórmula geral para se obter as raízes de uma equação do 2º grau.

Procedimentos do estudo

O estudo foi pautado em referenciais bibliográficos encontrados com certa acessibilidade, referentes à história da matemática, os quais se fizerem fundamentais para este propósito. As obras mais conhecidas se constituíram como fontes para verificar como alguns historiadores da matemática destacaram acerca da figura humana de Bhaskara.

A partir de distintas fontes (BOYER, 1996; EVES, 1997; KATZ, 1998; STRUIK, 1997) foi possível verificar como o nome Bhaskara é presente no contexto da história da matemática na Índia. Da confluência das informações, é possível descrever conforme segue.

Bhaskara I e Bhaskara II

Bhaskara I e Bhaskara II? Isto mesmo! Em referências históricas encontram-se dois matemáticos hindus chamados Bhaskara. Não há, entretanto, indícios de parentesco entre eles, uma vez que cinco séculos os separam.

Segundo O'Connor e Robertson (2000), sobre Bhaskara I (600-680) não há muita informação. Tem-se que ele viveu na Índia, provavelmente nasceu em Saurastra e mais tarde mudou-se para Amaska, e foi um seguidor de Aryabhata I[6]. A ele são creditados dois trabalhos e comentários sobre o trabalho de Aryabhata I. A *Mahabhaskariya*, o *Laghubhaskariya* e o *Aryabhatiyabhasya* são as obras de Bhaskara I, nas quais ele trata temas

---

[6] Aryabhata também é o nome de dois matemáticos hindus, não contemporâneos entre si. Para melhor diferenciação, os historiadores designam Aryabhata I e II. Aryabhata I (476-550) é o primeiro nome entre os grandes astrônomos e matemáticos da Índia. Ele foi o pioneiro a explicar como ocorrem os eclipses lunar e solar. Aryabhata forneceu também um valor muito próximo para o Pi. Sua obra *Aryabhatiya* é sobre matemática. Aryabhata descreve o algoritmo *kuttaka* para resolver equações indeterminadas. Entre outras realizações, deixou procedimentos para cálculos de razões e fórmulas trigonométricas. Quanto a Aryabhata II (ca.920 – ca.1000), pouco se sabe de sua vida. Seu principal trabalho *Mahasiddhanta*, escrito em sânscrito, contém dezoito capítulos sobre astronomia, geometria, geografia e álgebra, aplicadas à determinação de longitudes dos planetas. Nesse trabalho, ele também fornece regras para resolver equações indeterminadas do tipo $by = ax + c$. Aryabhata II produziu uma tabela para senos determinados com mais de cinco casas decimais.

astronômicos. Em sua obra *Mahabhaskariya*, Bhaskara I dá uma aproximação para a função trigonométrica seno utilizando uma função racional, expressa pela seguinte fórmula:

$$sen\ x = \frac{16x\ (\pi - x)}{[5\pi^2 - 4x\ (\pi - x)]}$$

Exemplificando-a para o cálculo de seno de x, no intervalo de 0 a π em subintervalos de π/10, tem-se:

x	*Fórmula*	*sen x*	*Erro*
0	0,000000000	0,000000000	0,000000000
$\pi/10$	0,310344827	0,309016994	0,001327833
$\pi/5$	0,587155963	0,587785252	-0,000629289
$3\pi/10$	0,807692307	0,809016994	-0,001324687
$2\pi/5$	0,950495049	0,951056516	-0,000561467
$\pi/2$	1,000000000	1,000000000	0,000000000
$3\pi/5$	0,950495049	0,951056516	-0,000561467
$7\pi/10$	0,807692307	0,809016994	-0,001324687
$4\pi/5$	0,587155963	0,587785252	-0,000629289
$9\pi/10$	0,310344827	0,309016994	0,001327833
π	0,000000000	0,000000000	0,000000000

É uma fórmula considerada como muito precisa, pois sua utilização conduz a um erro quase insignificante, conforme pode ser observado pela última coluna da direita na tabela.

Bhaskara I também criticou uma das aproximações utilizadas para π que, por muitos séculos, foi $\sqrt{10}$. Ele lamentava que uma medida exata da circunferência de um círculo em termos de diâmetro ainda não existia e ele acreditava que π não era racional.

Quando se fala em Bhaskara II (1114-1185), este é o famoso matemático hindu que tem seu nome relacionado à fórmula para resolver equações do segundo grau. Ele também é conhecido como Bhaskaracharya que significa "Bhaskara, o Professor", ou simplesmente Bhaskara.

Bhaskara também viveu na Índia, era filho de um astrólogo e seus trabalhos eram basicamente sobre matemática e astronomia. Alguns historiadores o destacam como o cimo do conhecimento matemático no século XII por ele ter alcançado um nível de entendimento dos sistemas de números e resolução de equações que não havia sido realizado na Europa por vários séculos.

Bhaskara estudou trabalhos de Brahmagupta e, portanto, tinha conhecimento sobre o zero e os números negativos. Sabia também que a equação $x^2 = 9$ tinha duas soluções, e forneceu a fórmula:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Nos estudos de Bhaskara também estão presentes muitos problemas diofantinos e a equação de Pell [7] $px^2 + 1 = y^2$, a qual ele resolveu para p = 8, 11, 32, 61 e 67.

São conhecidas seis obras de Bhaskara: *Lilavati* (Graciosa), *Bijaganita* (Extração de Raízes), *Siddhantasiromani*, *Vasanabhasya* de *Mitaksara*, *Karanakutuhala* (Cálculos Astronômicos) e o *Vivarana*. Destas, as três primeiras são tidas como as mais interessantes para a matemática.

A obra mais famosa de Bhaskara é *Lilavati*, que leva o nome de sua filha. Segundo alguns historiadores da matemática, Bhaskara dedicou esta obra à sua filha que acabara de perder o momento certo para se casar e, sendo assim ela não teria outra chance, então Bhaskara achou que a única forma de consolá-la seria escrever-lhe um manual de matemática.

O *Lilavati* é composto por treze capítulos que tratam se assuntos como: termos aritméticos, juros, progressões, geometria e combinações. Nessa obra, Bhaskara trabalhou com números negativos, operações com o zero, apresentou dois métodos para multiplicação, quatro métodos para extração da raiz quadrada, considerada por ele e por muitos matemáticos hindus como um caso especial de multiplicação e também tratou da regra de três inversa.

[7] John Pell (1611-1685, matemático inglês). Trabalhou em álgebra e teoria dos números. A equação $y^2 = ax^2 + 1$, na qual a é um inteiro não quadrado, foi primeiramente estudada por Brahmagupta e Bhaskara II. No entanto, a teoria decorrente desse estudo é exibida em um livro cuja verdadeira autoria é conferida a Pell. A denominação “equação de Pell” é atribuída a Euler.

No *Bijaganita* Bhaskara propõe equações quadráticas e diz que as duas soluções que podem ser encontradas são igualmente admissíveis. No *Siddhantasiromani*, que é sobre astronomia matemática, Bhaskara traz alguns resultados interessantes de trigonometria, entre eles estão: *sen (a + b) = sen a . sen b + cos a .sen b* e

sen (a – b) = sen a . cos b – cos a . sen b

Os trabalhos de Bhaskara foram de grande contribuição para a matemática e em 1207 foi criado, na Índia, um instituto para estudar as obras de Bhaskara. Ele foi o último matemático do período medieval na Índia.

Bhaskara morreu em 1185, aos 71 anos de idade, em Ujjain, Índia.

Considerações

Com esse estudo foi possível observar que, apesar de ter o matemático Bhaskara um grande mérito por uma descoberta que não foi sua, os estudos realmente feitos por ele são pouco conhecidos. Por esse motivo quando se comprova que a famigerada “fórmula de Bhaskara” não foi deduzida por ele – Bhaskara II, muitos imaginam então que ele não tem mais destaque para a matemática, o que é uma conclusão equivocada. Afinal, não se pode desmerecer toda a obra de Bhaskara apenas por uma associação inconveniente que, aparentemente, só é feita no Brasil.

Bhaskara II não estudou apenas matemática, ele foi também astrônomo, poeta e filósofo e, em todas essas áreas ele deixou contribuições importantes como, por exemplo, as fórmulas para encontrar o seno de uma soma ou diferença de arcos, mencionadas nesse trabalho.

Dessa forma, mesmo desvinculando Bhaskara da fórmula resolutiva para equações do segundo grau, pode-se e deve-se não só associá-lo a outros estudos matemáticos como também relevantes na história da matemática.

Referências

BALL, Walter William Rouse. **A Short Account of the History of Mathematics**. New York: Dover, 1960.

BARONI, Rosa Lucia Sverzut; NOBRE, Sergio Roberto. **A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática**. In: BICUDO, Maria Aparecida

Viggiani. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. ELZA F. GOMIDE. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Três excursões pela História da Matemática**. Rio de Janeiro: Intermat, 2008.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática: uma breve história**. São Paulo: Livraria da física, 2008.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 1997.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics: an Introduction**. 2. ed. Addison-Wesley, 1998.

O'CONNOR, J.J.; E F ROBERTSON, E. F. **Bhaskara**. Disponível em: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html. 2000. Acesso em: 31.mar.10.

STRUIK, Dirk Jan. **História Concisa das Matemáticas**. 3. ed. Trad. JOÃO COSME SANTOS GUERREIRO. Lisboa: Gradiva, 1997.