Material Didático

Série

Probabilidade

Parte II

Enfoque:
Engenharia de Produção

Prof. Lori Viali, Dr.

SUMÁRIO

ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Seja E um experimento e S um espaço amostra associado. Se X é uma variável aleatória definida em S tal que X(S) seja infinito não-enumerável, isto é, X(S) seja um intervalo de números reais, então X é dita uma variável aleatória contínua.

Definição

Seja X uma variável aleatória contínua (VAC). A função f(x) que associa a cada $x \in X(S)$ um número real que satisfaz as seguintes condições:

(a) $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X(S)$ e

(b) $\int_{X(S)} f(x)dx = 1$

É denominada de **função densidade de probabilidade (fdp)** da variável aleatória X.

Neste caso f(x) representa apenas a densidade no ponto x, ao contrário da variável aleatória discreta, f(x) aqui **não** é a probabilidade de a variável assumir o valor x.

1.1. CÁLCULO DE PROBABILIDADE COM UMA VAC

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x). Sejam a < b, dois números reais. Define-se:

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números "a" e "b" é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = a e x = b.

Neste caso, tem-se também:

(a) $P(X = a) = 0$, isto é, a probabilidade de que uma variável aleatória contínua assuma um valor isolado é igual a zero. Para variáveis contínuas só faz sentido falar em probabilidade em um intervalo, uma vez, que a probabilidade é definida como sendo a área sob o gráfico. f(x) não representa nenhuma probabilidade. Somente quando ela for integrada entre dois limites produzirá uma probabilidade.

(b) Se a < b são dois números reais então:

$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$,

(c) Se uma função f* satisfizer às condições $f^*(x) \geq 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = k$, onde "k" é um número real positivo, mas não igual a 1, então f*(x) pode ser transformada numa fdp mediante a seguinte transformação:

$f(x) = f^*(x) / k$, para todo x.

Neste caso a f(x) será uma função densidade de probabilidade.

(d) Se X assumir valores apenas num intervalo finito [a; b], pode-se simplesmente por f(x) = 0 para todo $x \notin [a; b]$. como conseqüência a fdp ficará definida para todos os valores reais de x e pode-se exigir que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Assim, sempre que a f(x) for especificada apenas num intervalo finito, deve-se supor que seja zero para todos os demais valores não pertencentes ao intervalo.

Exemplo 1.1

Seja X uma VAC com fdp dada por:

$f(x) = 2x$ se $0 < x < 1$

$= 0$, para quaisquer outros valores.

Determinar a $P(X < 1/2)$

Solução:

$P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} (2x)dx = 1/4 = 25\%$

1.2. A FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Seja X uma VAC com função densidade de probabilidade f(x). Então a **função de distribuição acumulada** (FDA), ou simplesmente **função de distribuição** (FD) de X é a função F definida por:

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

Solução:

Suponha-se que X seja uma VAC com fdp dada por:

$f(x) = 2x$ se $0 < x < 1$

$= 0$, para quaisquer outros valores.

Determinar a FD de X

Solução:

A função de distribuição de X é a função F tal que:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 2udu = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

1.3. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA (CARACTERIZAÇÃO)

Considere X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x).

1.3.1. Expectância, esperança, média ou valor esperado de X

A média, expectância, **valor esperado** ou esperança matemática da variável aleatória contínua X, representada por μ ou E(X), é calculada por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

Obs. Não é garantido que esta integral exista (convirja) sempre.

1.3.2. A variância de X

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ = E(X). Então a variância de X, anotada por σ^2 ou V(X) é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

1.3.3. O desvio padrão

O desvio padrão da variável aleatória contínua X, anotado por σ, é a raiz quadrada da variância.

1.3.4. A variância relativa e o coeficiente de variação

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ = E(X) e variância σ^2 = V(X). Então a variância relativa de X, anotada por: γ^2, é definida por:

$$\gamma^2 = \sigma^2 / \mu^2$$

O coeficiente de variação de X é definido como a raiz quadrada da variância relativa:

$$\gamma = \sigma / \mu$$

Exemplo 1.2

Determinar a expectância e a variância da VAC cuja fdp é dada por:

$f(x) = 3x^2$ se $-1 \le x \le 0$

$= 0$ caso contrário

Solução:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_{-1}^{0} x.(3x^2)dx = \int_{-1}^{0}(3x^3)dx = 3.\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -3/4 = -0,75$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.(3x^2)dx - (3/4)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^4 dx - (3/4)^2 = 3.\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} - (3/4)^2$$

$= 3/80$.

1.4. DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

Assim como ocorre com as variáveis discretas, existem algumas distribuições especiais de probabilidade contínuas que por sua freqüência de uso vale a pena estudar mais detalhadamente. Entre elas vale destacar as distribuições: uniforme, exponencial e normal.

1.4.1. A distribuição uniforme

Definição:

Seja X uma VAC que pode tomar todos os valores num intervalo [a, b]. Se a probabilidade de a variável assumir valores num subintervalo for a mesma que para qualquer outro subintervalo de mesmo comprimento teremos então uma distribuição uniforme. A função densidade de probabilidade de uma VAC deste tipo será:

$f(x) = 1 / (b - a)$ para $a \le x \le b$

$= 0$ para qualquer outro valor.

1.4.2. Propriedades da distribuição uniforme

As principais medidas para a distribuição uniforme podem ser determinadas de uma forma geral em termos dos extremos "a" e "b" do intervalo.

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_{a}^{b} x.\frac{1}{b-a}dx = (a + b) / 2$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2 = (b - a)^2 / 12$$

Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

A FDA da distribuição uniforme

A FDA da distribuição uniforme, pode ser facilmente avaliada e, vale:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} du = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Exemplo 1.3

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo [5, 10]. Determinar as probabilidades:

(a) $P(X < 7)$ **(b)** $P(X > 8,5)$

(c) $P(8 < x < 9)$ **(d)** $P(|x - 7,5| > 2)$

Solução:

Utilizando a FDA da variável vem:

(a) $P(X < 7) = F(7) = (7 - 5) / (10 - 5) = 2 / 5 = 40\%$

(b) $P(X > 8,5) = 1 - P(X < 8,5) = 1 - F(8,5) = 1 - (8,5 - 5) / (10 - 5) = 1 - 3,5 / 5 = 1 - 0,70 = 30\%$

(c) $P(8 < X < 9) = F(9) - F(8) = (9 - 5) / (10 - 5) - (8 - 5) / (10 - 5) = 4 / 5 - 3 / 5 = 1 / 5 = 20\%$

(d) $P(|X - 7,5| > 2) = P(X - 7,5 > 2 \text{ ou } X - 7,5 < -2) = P(X > 9,5 \text{ ou } X < 5,5) = 1 - F(9,5) + F(5,5) = 20\%$

1.4.3. A distribuição exponencial

Definição:

Uma variável aleatória contínua T tem uma distribuição exponencial de parâmetro λ se sua função densidade de probabilidade f(t) for do tipo:

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t > 0$

$= 0$ caso contrário

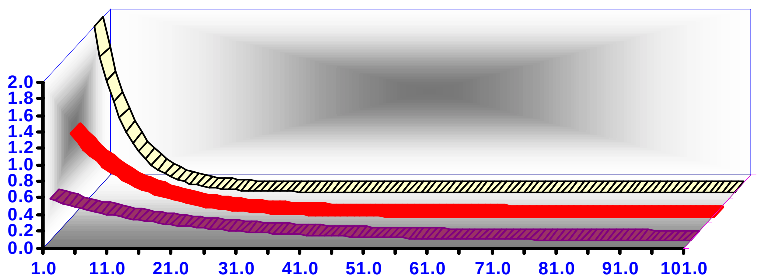

Figura 1.1 – Exemplos de distribuições exponenciais: P(2), P(1,5) e P(0,6).

Exemplo 1.4

Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida T (em unidades de 1000 horas) que segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. Suponha que o custo de fabricação do item seja R$ 2,00 e que o preço de venda seja R$ 5,00. O fabricante garante total devolução se $t < 0{,}90$. Qual o lucro esperado por item?

Solução:

Neste caso, tem-se:

$f(t) = e^{-t}$ para $t > 0$

A probabilidade de um componente durar menos de 900 horas é dada por:

$P(T < 0{,}90) = \int_0^{0,9} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{0,9} = -e^{-0,9} + e^{0} = 1 - 1/e^{0,9} = 59{,}34\%$

Desta forma o lucro do fabricante será uma VAD X com a seguinte distribuição:

x	-2	3
f(x)	0,5934	0,4066

Então o lucro esperado será:

E(X) = -2.0,5934 + 3.0,4066 = R$ 0,03

1.4.4. Propriedades da distribuição Exponencial

Se T for uma VAC com distribuição Exponencial, então:

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty t.f(t)dt = \int_0^\infty t.\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda$$

Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \int_0^\infty t^2.\lambda e^{-\lambda t}dx - \lambda^2 = 1/\lambda^2$$

O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

A FDA da distribuição Exponencial

A FDA da distribuição Exponencial é dada por:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}du = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

Portanto $P(X \ge x)$ $1 - F(x) = 1 - [1 - e^{-\lambda t}] = e^{-\lambda t}$

A distribuição Exponencial não tem memória

A distribuição Exponencial apresenta uma propriedade interessante que é denominada de falta de memória, ou seja:

$P(X \ge s + t / X \ge s) = P(X \ge s + t \cap X \ge s) / P(X \ge s) = P(X \ge s + t) / P(X \ge s) = e^{-\lambda(s+t)} / e^{-\lambda s} = e^{-\lambda t}$

Portanto $P(X \ge s + t / X \ge s) = P(X \ge t)$

Relação com a distribuição de Poisson

Deve-se observar inicialmente que fixado um tempo, a probabilidade de não ocorrências de eventos neste intervalo é dado por:

$f(0) = P(X = 0) = [(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}] / 0! = e^{-\lambda t}$

Se a variável aleatória contínua T representar o tempo passado entre a ocorrência de dois eventos de Poisson, então a probabilidade da não ocorrência no tempo "t" é igual a probabilidade de que o tempo T entre ocorrências seja maior que "t", isto é:

$P(T > t) = e^{-\lambda t}$

Tem-se ainda que:

$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Que conforme já visto é a função acumulada da variável aleatória exponencial de parâmetro λ, isto é:

$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

1.4.5. A distribuição normal

Um dos principais modelos de distribuição contínua é a curva normal ou de Gauss. Sua importância para a Estatística (prática) reside no fato que muitas variáveis encontradas na natureza se distribuem de acordo com o modelo normal. Este modelo também tem uma importância teórica devido ao fato de ser uma *distribuição limite*.

Uma variável aleatória contínua X tem uma distribuição normal (ou Gaussiana) se sua função densidade de probabilidade for do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \text{ para } -\infty \leq x \leq \infty$$

1.4.6. Propriedades da distribuição normal

Se X for uma VAC com distribuição Normal, então:

Média, expectância ou valor esperado

$E(X) = \mu$, isto é, o parâmetro μ é a média da distribuição normal.

Variância

$V(X) = \sigma^2$, isto é, a variância da distribuição normal é o parâmetro σ ao quadrado.

O desvio padrão

O desvio padrão da distribuição normal é o parâmetro σ.

FDA da distribuição Normal

A função de distribuição (FDA) da normal reduzida é representada por:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

Esta integral, e aliás como de qualquer outra normal, não pode ser avaliada pelo método tradicional (teorema fundamental do cálculo). Ela só pode ser calculada por métodos numéricos. E por isso ela é encontrada tabelada em qualquer livro texto de Probabilidade ou Estatística.

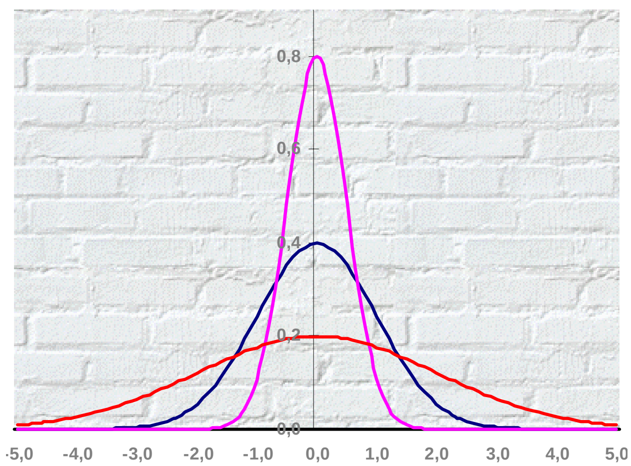

Figura 1.2 – Distribuições normais: N(0; 1/2), N(0; 1) e N(0; 2)

1.4.7. Outras propriedades

(a) Transformação linear de uma variável aleatória normal

Se X tiver uma distribuição N(μ,σ) e se Y = aX + b, então Y terá a distribuição N(aμ + b, aσ)

(b) Combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes

A combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes será uma variável aleatória normalmente distribuída.

(c) $f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$ ou $-\infty$.

(d) $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão da função f(x), isto é, são os valores onde o gráfico da função muda o sinal da curvatura.

(e) $x = \mu$ é o ponto de máximo de f(x) e este máximo vale $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.

(f) f(x) é simétrica ao redor de $x = \mu$, isto é: $f(\mu + x) = f(\mu - x)$

(g) Se X tem uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ se escreverá:

$X : N(\mu, \sigma)$

(h) Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, tem-se uma distribuição normal padrão ou normal reduzida. A variável normal +padrão será anotada por Z. Então Z : N(0, 1). A função densidade de probabilidade da variável aleatória Z será representada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\text{, para } -\infty \le z \le \infty$$

(i) Se X é uma $N(\mu, \sigma)$, então $Z = (X - \mu) / \sigma$ é a normal padrão ou reduzida. Isto significa que qualquer curva normal poderá ser padronizada, mediante esta transformação.

1.4.8. Tabelas

A forma de se calcular probabilidade com qualquer distribuição normal é através da tabela da normal padrão. Assim se $X : N(\mu, \sigma)$ então primeiro é necessário padronizar X, isto é, fazer:

$Z = (X - \mu) / \sigma$.

Em seguida obter em uma tabela o valor da probabilidade, isto é, o valor:

$P(Z \le z) = \Phi(z)$

Este valor $\Phi(z)$ pode ser lido como "valor tabelado de z" e significa a probabilidade de a variável aleatória contínua $Z = (X - \mu) / \sigma$ assumir valores à esquerda (abaixo de) do valor particular "z".

Lembrar que qualquer tabela é construída fornecendo os valores da FDA de Z. A maioria delas fornece as probabilidades de $Z \le z$ para valores de z entre -3,09 e +3,09 e com aproximação centesimal. Algumas fornecem valores de z entre 0 e 3,09

Assim o primeiro valor tabelado é em geral $\Phi(-3,09) = P(Z \le -3,09)$ que vale 0,0000, isto é, é zero com uma aproximação de 4 decimais. O valor seguinte seria $\Phi(-3,08) = P(Z \le -3,08) = 0,0001$.

O último valor tabelado é, em geral, $\Phi(3,09) = P(Z \le 3,09) = 1,000$, pois é o valor acumulado, isto quer dizer, que até este valor tem-se a totalidade da área útil sob a curva avaliada com uma aproximação de 4 decimais.

Convém ressaltar que as tabelas sendo da FDA de Z fornecem a área à esquerda de um valor qualquer "z". No entanto, como a curva é simétrica, se quiséssemos, a área à direita de "z", basta observar que:

$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$

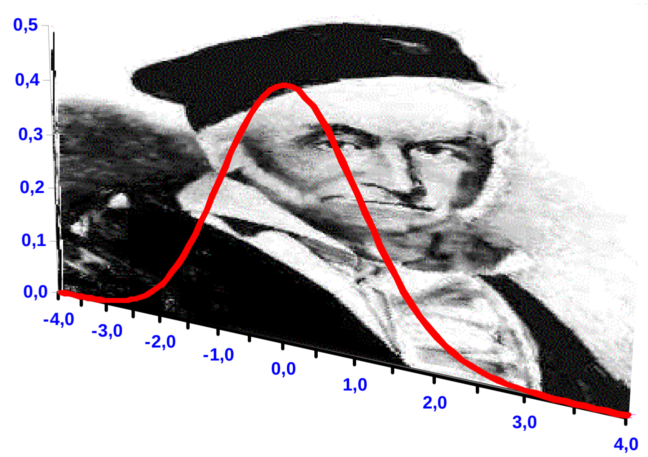

Figura 1.3 – Distribuição normal padrão - N(0; 1)

Exemplo 1.5

Seja Z uma N(0, 1). Determinar as seguintes probabilidades:

(a) $P(Z < 2{,}23)$ **(b)** $P(Z > -1{,}45)$

(c) $P(-2 < Z \leq 2)$ **(d)** $P(-1 \leq Z \leq 1)$

Solução:

(a) $P(Z < 2{,}23) = \Phi(2{,}23) = 98{,}71\%$

(b) $P(Z > -1{,}45) = 1 - P(Z \leq -1{,}45) = 1 - \Phi(-1{,}45) = 1 - 0{,}0735 = 92{,}65\%$

(c) $P(-2 < Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9772 - 0{,}0228 = 95{,}44\%$

(d) $P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 68{,}26\%$

Exemplo 1.6

Seja X uma VAC com distribuição N(10, 2). Determinar:

(a) $P(X < 10)$ **(b)** $P(X > 11{,}50)$

(c) $P(8 < Z \leq 12)$ **(d)** $P(6{,}08 \leq Z \leq 13{,}92)$

Solução:

Neste caso, antes de se poder procurar os valores na tabela é necessário padronizar cada valor de X, através da expressão:

$Z = (X - \mu) / \sigma = (X - 10) / 2$

(a) $P(X < 10) = P((X - 10) / 2 < (10 - 10) / 2) = P(Z < 0) = \Phi(0) = 50\%$

(b) $P(X > 11{,}50) = P(Z > (11{,}50 - 10) / 2) = P(Z > 0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 22{,}66\%$

(c) $P(8 < X \leq 12) = P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 68{,}26\%$

(d) $P(6{,}08 \leq X \leq 13{,}92) = P(-1{,}96 < Z \leq 1{,}96) = \Phi(1{,}96) - \Phi(-1{,}96) = 0{,}9750 - 0{,}0250 = 95\%$

1.4.9. Relação entre as distribuições Binomial e Normal

Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente com parâmetros "n" e "p". Isto é:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$$

Quando o número de provas "n" cresce (tende ao infinito) a distribuição binomial tende a uma distribuição normal de média $\mu = np$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{npq}$

Em geral admite-se que para $np \geq 5$ e $nq \geq 5$, "n" já será suficientemente grande para se poder aproximar uma distribuição binomial pela normal.

No entanto, devido ao fato de se estar aproximando uma distribuição discreta, através de uma contínua, recomenda-se para se obter maior precisão, realizar uma *correção de continuidade* que consiste em transformar, por exemplo, $P(X = x)$ no intervalo $P(x - 0{,}5 < X < x + 0{,}5)$ e o mesmo em qualquer outra situação.

Exemplo 1.7

No lançamento de 30 moedas honestas, qual a probabilidade de saírem:

(a) Exatamente 12 caras?

(b) Mais de 20 caras?

Solução:

(a) A probabilidade de saírem 12 caras é dada pela distribuição binomial por:

$$P(X = 12) = \binom{30}{12}.0{,}5^{12}.0{,}5^{18} = 8{,}06\%$$

Aproximando pela normal tem-se:

$\mu = np = 30.(1/2) = 15$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 2{,}7386$

Então P(X =12) calculado pela normal com utilização da correção de continuidade será:

$P(X = 12) \cong P(11{,}5 < X < 12{,}5) = P(-1{,}28 < Z < -0{,}91) = 0{,}3997 - 0{,}3186 = 8{,}11\%$, que não é muito diferente do valor exato 8,06%.

(b) $P(X > 20) = \sum_{i=21}^{30} \binom{30}{i} . \left(\frac{1}{2}\right)^{i} . \left(\frac{1}{2}\right)^{30-i} = 2{,}14\%$

Aproximando pela normal, tem-se:

$P(X > 20{,}5) = 0{,}5000 - 0{,}4778 = 2{,}22\%$

2. PROPRIEDADES DA MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2.1. MÉDIA

(1) A média de uma constante é igual a própria constante.

$E(k) = k$, onde k = constante

(2) Se multiplicarmos os valores de uma variável aleatória por uma constante, a média fica multiplicada por esta constante.

$E(kX) = k.E(X)$

(3) Se os valores de uma variável aleatória forem somados a uma constante a média ficará igualmente somada dessa constante.

$E(X \pm k) = E(X) \pm k$

(4) A média de uma soma ou diferença de duas variáveis aleatórias é igual a soma ou diferença das médias dessas variáveis.

$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

(5) A média do produto de duas variáveis aleatórias **independentes** é igual ao produto das médias dessas variáveis.

$E(X.Y) = E(X).E(Y)$

2.2. VARIÂNCIA

(1) A variância de uma constante é nula

$V(k) = 0$

(2) Se multiplicarmos os valores de uma variável aleatória por uma constante, a variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.

$V(kX) = k^2.V(X)$

(3) Se os valores de uma variável aleatória forem somados a uma constante a variância não se altera.

$V(X \pm k) = V(X)$

(4) A variância de uma soma ou diferença de duas variáveis aleatórias **independentes** é igual a soma das variâncias dessas variáveis.

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

2.3. A MEDIANA E A MODA

A **mediana** de uma variável aleatória é o valor que divide a distribuição em duas partes eqüiprováveis. Será representada por **md.** Então:

$P(X < md) = P(X > md) = 0,50.$

Este ponto sempre existe se a variável é contínua, onde a mediana pode ser definida como sendo o ponto tal que $F(md) = 0,50$. No caso discreto pode haver todo um intervalo que satisfaz a relação acima, convenciona-se em geral adotar o ponto médio deste intervalo. Pode-se ainda, neste caso, definir a mediana como sendo o menor valor para o qual $F(md) > 0,5$.

A **moda** é o(s) ponto(s) de maior probabilidade, no caso discreto, ou maior densidade de probabilidade no caso contínuo. É representada por **mo**.

2.4. DESIGUALDADES DE TCHEBYCHEFF E CAMP-MEIDELL

Pode-se demonstrar que, para qualquer distribuição de probabilidade que possua média μ e desvio padrão σ, tem-se, para qualquer número "$k > 1$":

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$ (Desigualdade de **Tchebycheff**, Tchebichev ou Chebyshev, 1821 - 1894), ou de forma equivalente

$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$

Se a distribuição for unimodal e simétrica, então:

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 4/9k^2$ (Desigualdade de **Camp-Meidell**)

Estas desigualdades fornecem as probabilidades de que os valores de uma variável aleatória (qualquer) esteja num intervalo simétrico em torno da média de amplitude igual a 2k desvios padrões. Assim se k = 2, por exemplo, a desigualdade de Tchebycheff estabelece que o percentual de valores da variável aleatória que está compreendida no intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é de pelo menos 1 - 1/4 = 75%. Conforme visto pela normal este percentual vale exatamente 95,44%. Mas como a normal é simétrica e unimodal, neste caso, um resultado mais próximo é dado pela desigualdade de Camp-Meidell, isto é, $1 - 4/9k^2 = 1 - 1/9 = 88,89\%$.

Exemplo 2.1

Compare o limite superior da probabilidade $P[(X - \mu| \geq 2\sigma)]$, obtida pela desigualdade de T-chebycheff, com a probabilidade exata se X for uniformemente distribuída sobre (-1, 3).

Solução:

Para uma distribuição uniforme tem-se $\mu = (a + b) / 2 = (-1 + 3) / 2 = 1$ e

$V(X) = (b - a)^2 / 12 = 4/3$

Então: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - 1| \geq 4\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$ é a probabilidade exata.

Por Tchebycheff, teríamos:

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - 1| \geq 4\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1/4$.

3. EXERCÍCIOS

(78) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$f(x) = 3x^2$ se $0 < x < 1$

$= 0$ caso contrário.

Calcular a probabilidade dessa variável assumir um valor maior ou igual a 1/3.

(79) Sendo $f(x) = kx^3$ a densidade de uma variável aleatória contínua no intervalo $0 < x < 1$, determine o valor de "k".

(80) Uma variável aleatória contínua X é definida pela seguinte função densidade:

$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$ para $0 \leq x < 2$. Determinar:

(80.1) A média **(80.2)** A variância

(81) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte fdp: $f(x) = \begin{cases} 2kx & \text{se } 0 \leq x < 3; \\ kx & \text{se } 3 \leq x < 5; \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

Determinar o valor de k, a média, a mediana e a variância da variável aleatória.

(82) Uma variável X é uniformemente distribuída no intervalo [10, 20]. Determine a expectância e a variância de X e calcule ainda a $P(12,31 < X < 16,50)$.

(83) Suponha que X seja uniformemente distribuída entre $[-\alpha, \alpha]$, onde $\alpha > 0$. Determinar o valor de α de modo que as seguintes relações estejam satisfeitas:

(83.1) $P(X > 1) = 1/3$ **(83.2)** $P(X < 1/2) = 0,7$

(84) Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1000 horas) que é considerado uma variável aleatória com fdp dada por:

$f(x) = e^{-x}$, $x > 0$

$= 0$, caso contrário.

Suponha ainda que o custo de fabricação de um item seja 2,00 um e o preço de venda seja 5,00 um. O fabricante garante total devolução se $x \leq 0,8$. Qual o lucro esperado por item?

(85) Uma lâmpada tem duração de acordo com a seguinte densidade de probabilidade:

$f(t) = 0,001e^{-0,001t}$ para $t > 0$

$= 0$ caso contrário

Determinar

(85.1) A probabilidade de que uma lâmpada dure mais do que 1200 horas.

(85.2) A probabilidade de que uma lâmpada dure menos do que sua duração média.

(85.3) A duração mediana.

(86) Se as interrupções no suprimento de energia elétrica ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com a média de uma por mês (quatro semanas), qual a probabilidade de que entre duas interrupções consecutivas haja um intervalo de:

(86.1) Menos de uma semana. **(86.2)** Mais de três semanas.

(87) Se X : N(10, 2) Calcular:

(87.1) $P(8 < X < 10)$ **(87.2)** $P(9 \leq X \leq 12)$ **(87.3)** $P(X > 10)$ **(87.4)** $P(X < 8$ ou $X > 11)$

(88) Se X tem uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10, determine:

(88.1) $P(X < 115)$ **(88.2)** $P(X \geq 80)$ **(88.3)** $P(X > 100)$

(88.4) O valor de “a” tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0,9544$

(89) Na distribuição $N(\mu; \sigma)$, encontre:

(89.1) $P(X < \mu + 2\sigma)$ **(89.2)** $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

(89.3) O número “a”, tal que $P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 0,90$

(89.4) O número “a”, tal que $P(X > a) = 0,95$

(90) A alturas de 10000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal com média de 170 cm e desvio padrão de 5 cm.

(90.1) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 1,65 m?

(90.2) Qual o intervalo simétrico em torno da média, que conterá 75% das alturas dos alunos?

(91) As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média de 500 e desvio padrão de 50. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

(92) O número de pedidos de compra de certo produto que uma cia recebe por semana distribui-se normalmente, com média 125 e desvio padrão de 25. Se em uma dada semana o estoque disponível é de 150 unidades, qual é a probabilidade de que todos os pedidos sejam atendidos? Qual deveria ser o estoque para se tivesse 99% de probabilidade de que todos os pedidos fossem atendidos?

(93) Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3, com desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

(93.1) Qual a percentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?

(93.2) Qual a percentagem de garrafas em que o volume do líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

(93.3) O que acontecerá com a percentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1200 cm^3 e o desvio padrão 20 cm^3?

(94) O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma variável aleatória com distribuição normal de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro do anel diferir da média de mais do que 0,03 cm, ele é vendido por R$ 5,00, caso contrário, é vendido por R$ 10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?

(95) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos D_1 e D_2, tenham distribuições N(42; 6) e N(45; 3), respectivamente. Se o aparelho é para ser utilizado por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 51 horas?

(96) A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de pesos para cada classificação?

(97) Uma distribuição normal tem desvio padrão igual a 5 e é tal que 1,5% dos valores estão abaixo de 35. Determine sua média.

(98) Numa prova de vestibular com 50 questões objetivas de 5 alternativas cada, qual a probabilidade de que um candidato, que responde ao acaso (chuta) todas as questões, acerte mais do 15 questões?

(99) Um dado equilibrado é lançado 120 vezes. Determinar a probabilidade que a face 4 (quatro) apareça:

(99.1) 18 vezes ou menos

(99.2) Mais de 14 vezes

(100) No lançamento de 30 moedas equilibradas, qual a probabilidade de saírem:

(100.1) Exatamente 12 caras?

(100.2) Mais de 20 caras?

(101) Uma variável aleatória tem média igual a 5 e desvio padrão igual a 3. Determine:

(101.1) $P(|X - 5| \leq 3)$

(101.2) h tal que $P(|X - 5| > h) = 0,01$

(101.3) P(-1 ≤ X ≤ 11) **(101.4)** P(|X - 5| ≤ 7,5)

(102) Supondo que a média de uma variável aleatória X seja igual a 4 e o desvio padrão igual a 2, determine:

(102.1) A probabilidade de X estar no intervalo de **0** a **8**. **(102.2)** Qual o valor mínimo de P(-2 ≤ X ≤ 10).

4. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

(78) $P(X > 1/3) = 26/27$

(79) $k = 4$

(80) **(80.1)** $E(X) = 1$ **(80.2)** $\sigma^2 = 0,60$

(81) 1/17; 2,98; 2,92 e 1,50

(82) $E(X) = 15$ $V(X) = 8,33$ $P(12,31 < X < 16,50) = 41,90\%$

(83) **(83.1)** 3 **(83.2)** 5/4

(84) $5e^{-0,8} - 2 = 0,25$ um

(85) **(85.1)** 30,12% **(85.2)** 63,21%. **(85.3)**

(86) **(86.1)** 22,12% **(86.2)** 47,24%

(87) **(87.1)** 34,13% **(87.2)** 53,28% **(87.3)** 50% **(87.4)** 46,72%

(88) **(88.1)** 93,32% **(88.2)** 97,72% **(88.3)** 50% **(88.4)** a = 20

(89) **(89.1)** 97,72% **(89.2)** 68,26% **(89.3)** 1,645 **(89.4)** $a = \mu - 1,645\sigma$

(90) **(90.1)** 8413 **(90.2)** (164,25; 175,75)

(91) 0,0228 = 2,28%

(92) **(92.1)** 84,13% **(92.2)** 184

(93) **(93.1)** 15,87% **(93.2)** 95,44% **(93.3)** Não se altera

(94) 9,33 u.m.

(95) $P(D_1 > 45) = 30,85\%$ $P(D_1 > 51) = 6,68\%$

$P(D_2 > 45) = 50\%$ $P(D_2 > 51) = 2,28\%$

(96) 4,33 kg; 5,54 kg e 6,02 kg

(97) 45,85

(98) 2,62%

(99) **(99.1)** 35,57% **(99.2)** 91,15%

(100) **(100.1)** 8,11% (8,06% exato) **(100.1)** 2,22% (2,14% exato)

(101) **(101.1)** Zero **(101.2)** h = 30 **(101.3)** 75% **(101.4)** 84%

(102) **(102.1)** 3/4 = 75% **(102.2)** 8/9 = 88,89%

5. REFERÊNCIAS

[BUS86] BUSSAB, Wilton O, MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1986.

[COS74] COSTA NETO, Pedro Luís de Oliveira, CYMBALISTA, Melvin. *Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos.* São Paulo: Editora Edgard Blücher , 1977.

[FEL68] FELLER, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (vol. 1)*. John New York: Wiley & Sons, 1968. 509 p.

[HAZ77] HAZZAN, Samuel. *Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidades*. São Paulo: Atual, 1977.

[HIL88] HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. São Paulo: Campus e Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

[LIP74] LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria e Problemas de Probabilidade*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 225 p.

[MAR87] MARKLAND, Robert E., SWEIGART, James R. *Quantitative Methods: Applications to Managerial Decision Making*. New York: John Wiley & Sons, 1987. 827p.

[MAS90] MASON, Robert D., DOUGLAS, Lind A. *Statistical Techniques in Business And Economics*. IRWIN, Boston, 1990.

[MEY78] MEYER, Paul L. *Probabilidade: aplicações à Estatística.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

[MIL90] MILLER, Charles D., HEEREN, Vern E., HORNSBY Jr., E. John. *Mathematical Ideas*. USA: Harper Collins Publishers, 1990.

[REA93] *The Statistics Problem Solver.* Research and Education Association, Piscataway, New Jersey, 1993.

[ROT91] ROTHENBERG, Ronald I. *Probability and Statistics*. Orlando (FL), Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, 1991.

[ROS85] ROSS, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. Orlando (FL): Academic Press, 1985, 502 p.